线性代数
第三章：向量空间
习 题 解 答

宿州学院　数学与统计学院

目录

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

1.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

1.解 (1)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

1.解 (1)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

1.解 (1)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&5&-1\\1&1&-2&3\\3&-1&8&1\\1&3&-9&7\end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}&1\\0&1&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

1.解 (1)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\ \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\ \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{2}x_3-x_4\\ x_2=\frac{7}{2}x_3-2x_4\end{cases}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

自由未知量为x_3, x_4，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

自由未知量为x_3, x_4，

取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

自由未知量为x_3, x_4,

取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

解集为$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{是任意数} \right\}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5 \end{cases}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5\\x_2=x_3-3x_4+x_5\end{cases}$

自由未知量为x_3,x_4,x_5,

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$，解集为

$$\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2, k_3 \text{是任意数} \right\}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ -5 & 1 & -2 & 3\\ -1 & -11 & 2 & -5\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{14}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2\\ -5 & 1 & -2 & 3\\ -1 & -11 & 2 & -5\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\ \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\ \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1=-\frac{5}{14}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_2=\frac{3}{14}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$

自由未知量为x_3,x_4，

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

解集为 $\left\{ k_1 \begin{pmatrix} -\frac{5}{14} \\ \frac{3}{14} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{是任意数} \right\}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(4)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-5&1&-3\\-3&4&-2&1\\1&2&-1&3\\-2&15&-6&13\end{pmatrix}$

习题3.6$(P_{122}-P_{124})$

(4)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(4)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(4)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=0 \end{cases}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(4)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

自由未知量为x_4，

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

取$x_4 = 1$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

取$x_4=1$，得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

解集为$\left\{\ k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k_1\text{是任意数}\ \right\}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(5)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(5)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(5)齐次线性方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 1 & 4 \\ -2 & 15 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.6$(P_{122}-P_{124})$

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1=-\frac{7}{9}x_4 \\ x_2=-\frac{2}{9}x_4 \\ x_3=\frac{5}{9}x_4 \end{cases}$。

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1=-\frac{7}{9}x_4 \\ x_2=-\frac{2}{9}x_4 \\ x_3=\frac{5}{9}x_4 \end{cases}$。自由未知量为$x_4$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{9}x_4 \\ x_2 = -\frac{2}{9}x_4 \\ x_3 = \frac{5}{9}x_4 \end{cases}$。自由未知量为$x_4$，

取$x_4=1$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

齐次线性方程组同解于$\begin{cases} x_1=-\frac{7}{9}x_4 \\ x_2=-\frac{2}{9}x_4 \\ x_3=\frac{5}{9}x_4 \end{cases}$。自由未知量为$x_4$，

取$x_4=1$，得基础解系

$$\xi_1=\begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix},$$

解集为$\left\{ k_1\begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1\text{是任意数} \right\}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(6)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(6)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(6)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2 & -1\\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3\\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2\\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5\end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(6)齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -15 & 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

对系数矩阵A实施初等行变换，化为规范阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

齐次线性方程组同解于 $x_1=3x_2-x_3+2x_4+x_5$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

自由未知量为x_2, x_3, x_4, x_5

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

自由未知量为x_2, x_3, x_4, x_5

取$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2,k_3,k_4\text{是任意数} \right\}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

2.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

2.解 (1)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

2.解 (1)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

2.解 (1)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

2.解 (1)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

线性方程组、导出齐次线性方程组分别同解于

$$\begin{cases}x_1=-8-x_3\\x_2=13+x_3\\x_4=2\end{cases},\quad\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\\x_4=0\end{cases}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有一个自由未知量x_3，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$,

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$,

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有一个自由未知量x_3，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$,

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$,

解集为 $\left\{\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\middle| k_1\text{是任意数}\right\}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6\end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\2&4&2&1&-6\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{9}{7}&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{7}&\frac{1}{2}&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(2)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1\\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

线性方程组、导出齐次线性方程组分别同解于

$$\begin{cases}x_1=1-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_2=-2+\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases},\quad\begin{cases}x_1=-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_2=\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有自由未知量x_3,x_4，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$，

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有自由未知量x_3,x_4，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$，

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，

解集为$\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k_1,k_2\text{是任意数}\right\}$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5\\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17\\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(3)线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2 & -3 & 11\\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5\\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17\\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$

对增广矩阵$\overline{A}$实施初等行变换，化为阶梯形，进而化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

线性方程组、导出齐次线性方程组分别同解于

$$\begin{cases}x_1=1-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_2=-2+\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_2=\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有自由未知量x_3, x_4，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$，

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\ \frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有自由未知量x_3,x_4，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$，

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，

解集为 $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k_1,k_2\text{是任意数}\right\}$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有自由未知量x_3, x_4，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}$，

导出组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$，

解集为 $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-\frac{9}{7}\\\frac{1}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\middle| k_1,k_2\text{是任意数}\right\}$.

注：(2)、(3)两题中的方程组是同解方程组.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

(4)方程组同解于$x_1=4+4x_2-2x_3+3x_4-6x_5$

导出齐次线性方程组为$x_1=4x_2-2x_3+3x_4-6x_5$

有自由未知量x_2,x_3,x_4,x_5，有一个特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，

导出组的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_4=\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\Bigg|k_i\text{是任意数}\right\}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\middle| k_i\text{是任意数}\right\}$$

3.证明

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\middle| k_i\text{是任意数}\right\}$$

3.证明 (1)因为$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的基础解系，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_i\text{是任意数} \right\}$$

3.证明 (1)因为$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的基础解系，

所以 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_i\text{是任意数} \right\}$$

3.证明 (1)因为$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的基础解系，

所以 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，且$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$的任意组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$仍是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \middle| k_i\text{是任意数} \right\}$$

3.证明 (1)因为$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的基础解系，

所以 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，且$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$的任意组合
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$仍是齐次线性方程组
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解.

(1)假设$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性相关，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为

$$\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\middle| k_i\text{是任意数}\right\}$$

3.证明 (1)因为$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的基础解系，

所以 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，且$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$的任意组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$仍是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解.

(1)假设$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性相关，而已知$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$\eta^*$可以由$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性表出.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

即，存在系数$k_1, k_2, ..., k_{n-r}$，使得
$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

即，存在系数$k_1, k_2, ..., k_{n-r}$，使得
$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，所以$\eta^*$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$的解，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

即，存在系数$k_1,k_2,...,k_{n-r}$，使得 $\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，所以$\eta^*$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解，这与$\eta^*$是非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的解矛盾.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

即，存在系数$k_1,k_2,...,k_{n-r}$，使得
$\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，所以$\eta^*$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解，这与$\eta^*$是非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的解矛盾.

所以$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

即，存在系数$k_1,k_2,...,k_{n-r}$，使得
$\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，所以$\eta^*$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解，这与$\eta^*$是非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的解矛盾.

所以$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关.

(2)假设$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性相关，则存在不全为0的系数$k,k_1,...,k_{n-r}$，使得
$k\eta^*+k_1(\eta^*+\xi_1)+\cdots+k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=0$成立.

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

即，存在系数$k_1, k_2, ..., k_{n-r}$，使得
$\eta^* = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，所以$\eta^*$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$的解，这与$\eta^*$是非齐次线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$的解矛盾.

所以$\eta^*, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性无关.

(2)假设$\eta^*, \eta^* + \xi_1, \ldots, \eta^* + \xi_{n-r}$线性相关，则存在不全为0的系数$k, k_1, ..., k_{n-r}$，使得
$k\eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$成立. 即
$(k + k_1 + \cdots + k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$成立.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

即，存在系数$k_1,k_2,...,k_{n-r}$，使得
$\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$成立，所以$\eta^*$是齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$的解，这与$\eta^*$是非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的解矛盾.

所以$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关.

(2)假设$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性相关，则存在不全为0的系数$k,k_1,...,k_{n-r}$，使得
$k\eta^*+k_1(\eta^*+\xi_1)+\cdots+k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=0$成立. 即
$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$成立.

若$k+k_1+\cdots+k_{n-r}\neq 0$，则由
$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$知，$\eta^*$可以由$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性表出，$\eta^*$是齐次线性方程组的解，矛盾.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，
所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，
所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

习题3.6$(P_{122}-P_{124})$

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，

所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

所以$k + k_1 + \cdots + k_{n-r} = 0$，从而
$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$，而$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性无关，
所以$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0$，进而有$k = 0$，

所以$\eta^*, \eta^* + \xi_1, \ldots, \eta^* + \xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以
$x_1, x_2, ..., x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组
$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$可以表示为$AX = \beta$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，所以$A\eta_i=\beta$，$i=1,2,...,s$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，所以$A\eta_i=\beta$，$i=1,2,...,s$. 所以

$Ax=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，
所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以
$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，
所以$A\eta_i=\beta$，$i=1,2,...,s$. 所以
$Ax=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，所以$A\eta_i=\beta$，$i=1,2,...,s$. 所以

$Ax=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s=k_1\beta+k_2\beta+\cdots+k_s\beta$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，

所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以

$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，

所以$A\eta_i=\beta$，$i=1,2,...,s$. 所以

$Ax=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s=$

$k_1\beta+k_2\beta+\cdots+k_s\beta=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\beta$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而
$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，
所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以
$x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，
所以$A\eta_i=\beta$, $i=1,2,...,s$. 所以
$Ax=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s=$
$k_1\beta+k_2\beta+\cdots+k_s\beta=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\beta=\beta$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，从而 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$，而$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，进而有$k=0$，

所以$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\ldots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关.

4. 证明 记A是以$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$为列向量的矩阵，$X$是以 $x_1,x_2,...,x_n$为分量的列向量，则非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$可以表示为$AX=\beta$.

因为$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$的$s$个解，所以$A\eta_i=\beta$, $i=1,2,...,s$. 所以 $Ax=A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s=k_1\beta+k_2\beta+\cdots+k_s\beta=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\beta=\beta$.

所以x是原方程组的解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中，含有一个解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中，含有一个解.

又因为非齐次线性方程组$AX=b$有解α_1,α_2，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中，含有一个解.

又因为非齐次线性方程组$AX=b$有解α_1,α_2，所以

$$2\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中，含有一个解.

又因为非齐次线性方程组$AX=b$有解α_1,α_2，所以

$$2\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中，含有一个解.

又因为非齐次线性方程组$AX=b$有解α_1,α_2，所以 $2\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$是$AX=0$的解，也是$AX=0$的基础解系.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

5.解 由于A的秩为2，且A是2×3矩阵，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中，含有一个解.

又因为非齐次线性方程组$AX=b$有解α_1,α_2，所以

$2\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$是$AX=0$的解，也是$AX=0$的基础解系.

所以非齐次线性方程组的解集为

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\middle|k\text{是任意数}\right\}.$$

习题3.6$(P_{122}-P_{124})$

6.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

6.解 因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

6.解 因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，所以$A$的秩为3，且$\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

6.解 因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，所以$A$的秩为3，且$\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的解.也是$AX=0$的基础解系.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

6.解 因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，所以$A$的秩为3，且$\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的解.也是$AX=0$的基础解系.

又因为$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，所以$AX=\beta$有解

$$\eta_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

6.解 因为$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，所以$A$的秩为3，且$\eta=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的解.也是$AX=0$的基础解系.

又因为$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，所以$AX=\beta$有解$\eta_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，也是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$的解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$\text{所以要求的解集为}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\Big|k\text{是任意数}\right\}.$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以要求的解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}.$

7.证明

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以要求的解集为 $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\middle| k\text{是任意数}\right\}$.

7.证明 (1)设为η_1,η_2,η_3是线性方程组3个线性无关的解，则$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是齐次线性方程组$AX=0$的两个线性无关的解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以要求的解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}.$

7.证明 (1)设为η_1,η_2,η_3是线性方程组3个线性无关的解，则$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是齐次线性方程组$AX=0$的两个线性无关的解. 而齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有$4-r(A)$个线性无关的解，所以$4-r(A)\geq 2$，$r(A)\leq 2$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以要求的解集为 $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\middle| k\text{是任意数}\right\}.$

7.证明 (1)设为η_1,η_2,η_3是线性方程组3个线性无关的解，则$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是齐次线性方程组$AX=0$的两个线性无关的解. 而齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有$4-r(A)$个线性无关的解，所以$4-r(A)\geq 2$，$r(A)\leq 2.$

又因为方程的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&-b\end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以要求的解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}.$

7.证明 (1)设为η_1,η_2,η_3是线性方程组3个线性无关的解，则$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是齐次线性方程组$AX=0$的两个线性无关的解. 而齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有$4-r(A)$个线性无关的解，所以$4-r(A)\geq 2$，$r(A)\leq 2.$

又因为方程的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b \end{pmatrix}$

对A实施初等行变换，化为阶梯形

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即，A的秩至少是2，$r(A) \geq 2.$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即，A的秩至少是2，$r(A) \geq 2$.

所以$r(A)=2$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即，A的秩至少是2，$r(A) \geq 2.$

所以$r(A) = 2.$

(2)解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即，A的秩至少是2，$r(A)\geq 2$.

所以$r(A)=2$.

(2)解 线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b & 1 \end{pmatrix}$,

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即，A的秩至少是2，$r(A) \geq 2$.

所以$r(A)=2$.

(2)解 线性方程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$进行行初等变换，化为阶梯形.

$$\overline{A} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-5-b & 4-2a \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-b-5 \end{pmatrix},$$

至少有两个主元，即，A的秩至少是2，$r(A) \geq 2.$

所以$r(A)=2.$

(2)解 线性方程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & -b & 1 \end{pmatrix}$，

对$\overline{A}$进行行初等变换，化为阶梯形.

$$\overline{A} \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-5-b & 4-2a \end{pmatrix}$$

由于$r(A)=2$，所以$a=2$，$b=3.$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

进而将$\overline{A}$化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

进而将$\overline{A}$化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\ \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\ \begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

线性方程组、导出齐次线性方程组分别同解于

$$\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4\\x_2=-3+x_3-5x_4\end{cases},\quad \begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\x_2=x_3-5x_4\end{cases}$$

有一个特解，导出组有基础解系分别是

$$\xi_0=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix};\ \xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$\text{解集为}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\middle| k_1,k_2\text{是任意数}\right\}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{是任意数} \right\}$

习题8.更正：其中$k \neq 9$是常数.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{是任意数} \right\}$

习题8.更正：其中$k \neq 9$是常数.

8.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$\text{解集为}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k_1,k_2\text{是任意数}\right\}$$

习题8.更正：其中$k\neq 9$是常数.

8.解 因为A的第一行非零，所以A的秩$r(A)\geq 1$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$$\text{解集为}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\middle|k_1,k_2\text{是任意数}\right\}$$

习题8.更正：其中$k\neq 9$是常数.

8.解 因为A的第一行非零，所以A的秩$r(A)\geq 1$.

对矩阵B进行初等行变换，化为阶梯形.

$$B\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&k-9\\0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{是任意数} \right\}$

习题8.更正：其中$k \neq 9$是常数.

8.解 因为A的第一行非零，所以A的秩$r(A) \geq 1$.

对矩阵B进行初等行变换，化为阶梯形.

$$B \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k-9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为$k \neq 9$，B的第一列和第三列线性无关，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

解集为 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k_1, k_2\text{是任意数} \right\}$

习题8.更正：其中$k \neq 9$是常数.

8.解 因为A的第一行非零，所以A的秩$r(A) \geq 1$.

对矩阵B进行初等行变换，化为阶梯形.

$$B \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & k-9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为$k \neq 9$，B的第一列和第三列线性无关， 而$AB=0$，矩阵B的列向量是$AX=0$的解向量.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

又因为$r(A)\geq 1$，

矩阵B的第一、三列$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$是$AX=0$的基础解系.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

又因为$r(A)\geq 1$，

矩阵B的第一、三列$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$是$AX=0$的基础解系.

所以$AX=0$的通解为

$$\left\{ k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix} \middle| k_1,k_2\text{是任意数} \right\}.$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

9.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

9.解 方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{各行加到第一行}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2}+a & \frac{n(n+1)}{2}+a & \cdots & \frac{n(n+1)}{2}+a & \frac{n(n+1)}{2}+a \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \cdots & n & n+a \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

若$a \neq -\frac{n(n+1)}{2}$，将A进一步化为阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

若$a\neq -\frac{n(n+1)}{2}$，将A进一步化为阶梯形.

$$A\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}$$

若$a\neq 0$，A有n个主元，矩阵A的秩$r(A)=n$，方程组只有零解；

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

若$a \neq -\frac{n(n+1)}{2}$，将A进一步化为阶梯形.

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

若$a \neq 0$，A有n个主元，矩阵A的秩$r(A)=n$，方程组只有零解；

若$a=0$，则方程组同解于$x_1=-x_2-x_3-\cdots-x_n$，

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

解集为

$$\left\{k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\middle|k_i\text{是任意数}\right\}.$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

若$a=-\frac{n(n+1)}{2}$，A可以化为

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

若$a=-\frac{n(n+1)}{2}$，A可以化为

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\frac{n+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

若$a=-\frac{n(n+1)}{2}$，A可以化为

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\frac{n+1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{3}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{n-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组有一个自由未知量，基础解系为$\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\ \frac{2}{n}\\ \vdots\\ \frac{n-1}{n}\\ 1\end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

方程组有一个自由未知量，基础解系为$\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \\ 1 \end{pmatrix}$，

解集为$\left\{ k \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{2}{n} \\ \vdots \\ \frac{n-1}{n} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$

习题3.6($P_{122} - P_{124}$)

10.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

10.解 (1)因为$A\xi_2=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

10.解 (1)因为$A\xi_2=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$进行初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

10.解 (1)因为$A\xi_2=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -4 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$进行初等行变换，化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

10.解 (1)因为$A\xi_2=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$进行初等行变换，化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组、导出齐次线性方程同解于

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3\end{cases},\quad\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

10.解 (1)因为$A\xi_2=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\0&-4&-2&2\end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$进行初等行变换，化为规范阶梯形.

$$\overline{A}\ \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\ \begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组、导出齐次线性方程同解于

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3\end{cases},\quad\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

方程组有特解$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，导出组基础解系为$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以,满足$A\xi_2=\xi_1$的$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$是任意数.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以,满足$A\xi_2=\xi_1$的$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$是任意数.

因为$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，所以$A^2\xi_3=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以,满足$A\xi_2=\xi_1$的$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$是任意数.

因为$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，所以$A^2\xi_3=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{pmatrix}$$

对$\overline{B}$进行初等行变换，化为规范阶梯形.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

所以,满足$A\xi_2=\xi_1$的$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$是任意数.

因为$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，所以$A^2\xi_3=\xi_1$的增广矩阵

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\end{pmatrix}$$

对$\overline{B}$进行初等行变换，化为规范阶梯形.

$$\overline{B}\ \xrightarrow[\text{规范阶梯形}]{\text{初等行变换}}\ \begin{pmatrix}1&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组、导出方程组分别同解于

$$x_1=\frac{1}{2}-x_2+0x_3,\quad x_1=-x_2+0x_3$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组、导出方程组分别同解于

$$x_1=\frac{1}{2}-x_2+0x_3,\quad x_1=-x_2+0x_3$$

有特解 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，导出组基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组、导出方程组分别同解于

$$x_1=\frac{1}{2}-x_2+0x_3,\quad x_1=-x_2+0x_3$$

有特解$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，导出组基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

所以满足$A^2\xi_3=\xi_1$的

$$\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，k_1,k_2是任意数.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组、导出方程组分别同解于

$x_1=\frac{1}{2}-x_2+0x_3,\quad x_1=-x_2+0x_3$

有特解$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，导出组基础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

所以满足$A^2\xi_3=\xi_1$的

$$\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}，\ k_1,k_2\text{是任意数}.$$

(2)证明

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

方程组、导出方程组分别同解于

$x_1=\frac{1}{2}-x_2+0x_3,\quad x_1=-x_2+0x_3$

有特解 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，导出组基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

所以满足$A^2\xi_3=\xi_1$的

$$\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}，\ k_1,k_2\text{是任意数}.$$

(2)证明 对任意的$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+k)\\-\frac{1}{2}(1+k)\\k\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-k_1\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1\\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1\\ 2 & k & k_2\end{pmatrix}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C有三个主元，所以C的秩为3，列向量线性无关，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C有三个主元，所以C的秩为3，列向量线性无关，
即对任意的ξ_2，ξ_3，都有ξ_1，ξ_2，ξ_3线性无关.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1\\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1\\ 2 & k & k_2\end{pmatrix}$

$$C\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1\\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

C有三个主元，所以C的秩为3，列向量线性无关，

即对任意的ξ_2，ξ_3，都有ξ_1，ξ_2，ξ_3线性无关.

11.解

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1\\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1\\ 2 & k & k_2\end{pmatrix}$

$$C\ \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}}\ \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1\\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

C有三个主元，所以C的秩为3，列向量线性无关，

即对任意的ξ_2，ξ_3，都有ξ_1，ξ_2，ξ_3线性无关.

11.解 (1)因为存在非0矩阵B，使得$AB=0$，所以齐次线性方程组$AX=0$有非零解.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

以ξ_1,ξ_2,ξ_3为列构作矩阵$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ -1 & -\frac{1}{2}(1+k) & k_1 \\ 2 & k & k_2 \end{pmatrix}$

$$C \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(1+k) & \frac{1}{2}-k_1 \\ 0 & -1 & -1+k_1+k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C有三个主元，所以C的秩为3，列向量线性无关，

即对任意的ξ_2，ξ_3，都有ξ_1，ξ_2，ξ_3线性无关.

11.解 (1)因为存在非0矩阵B，使得$AB=0$，所以齐次线性方程组$AX=0$有非零解.

$$A \xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

(2)$a=0$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_3=0 \end{cases}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

(2)$a=0$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_3=0 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

(2)$a=0$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_3=0 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，通解为$\left\{ k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

(2)$a=0$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_3=0 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，通解为$\left\{ k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

$a=2$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

(2)$a=0$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_3=0 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，通解为$\left\{ k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

$a=2$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

习题3.6($P_{122}-P_{124}$)

$AX=0$有非零解当且仅当A的秩$r(A)<3$，所以，若存在非零矩阵B，使得$AB=0$，则$a=0$或者$a=2$.

(2)$a=0$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_3 \\ x_3=0 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，通解为$\left\{ k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

$a=2$时，方程组同解于$\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$

基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，通解为$\left\{ k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k\text{是任意数} \right\}$.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun

ADDRESS: School of Mathematics and Statistics

SuZhou University

Suzhou, Anhui, 234000, China

EMAIL: Ning.qun@163.com