线性代数
第一章：矩阵及其运算

宿州学院　数学与统计学院

目录

1.3 矩阵的逆

例1.4 某公司有A, B两种产品销往甲、乙两地，现公司汇总出了产品的总销量、总价值、总利润如表1.9，其单位分别为吨、万元.

表 1.9 产品销售量、总价值与总利润

产品\销地	甲	乙	总价值	总利润
A	200	240	600	68
B	350	300	870	95

求：A, B两种产品的单位价格与单位利润.

1.3 矩阵的逆

例1.4 某公司有A, B两种产品销往甲、乙两地，现公司汇总出了产品的总销量、总价值、总利润如表1.9，其单位分别为吨、万元.

表 1.9 产品销售量、总价值与总利润

产品＼销地	甲	乙	总价值	总利润
A	200	240	600	68
B	350	300	870	95

求：A, B两种产品的单位价格与单位利润.

设产品销往甲、乙两地的单位价格分别为c_{11}、c_{21}，单位利润分别为c_{12}、c_{22}，则

1.3 矩阵的逆

$$\begin{cases} 200c_{11} + 240c_{21} = 600 \\ 350c_{11} + 300c_{21} = 870 \\ 200c_{12} + 240c_{22} = 68 \\ 350c_{12} + 300c_{22} = 95 \end{cases},$$

1.3 矩阵的逆

$$\begin{cases} 200c_{11} + 240c_{21} = 600 \\ 350c_{11} + 300c_{21} = 870 \\ 200c_{12} + 240c_{22} = 68 \\ 350c_{12} + 300c_{22} = 95 \end{cases},$$

即，$\begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$

1.3 矩阵的逆

$$\begin{cases} 200c_{11} + 240c_{21} = 600 \\ 350c_{11} + 300c_{21} = 870 \\ 200c_{12} + 240c_{22} = 68 \\ 350c_{12} + 300c_{22} = 95 \end{cases},$$

即，$\begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$

记$K = \begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

1.3 矩阵的逆

$$\begin{cases} 200c_{11} + 240c_{21} = 600 \\ 350c_{11} + 300c_{21} = 870 \\ 200c_{12} + 240c_{22} = 68 \\ 350c_{12} + 300c_{22} = 95 \end{cases},$$

即，$\begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$

记$K = \begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix}$，$L = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

由矩阵的乘法，上述关系可以表述为$KC = L$.

1.3 矩阵的逆

$$\begin{cases} 200c_{11} + 240c_{21} = 600 \\ 350c_{11} + 300c_{21} = 870 \\ 200c_{12} + 240c_{22} = 68 \\ 350c_{12} + 300c_{22} = 95 \end{cases},$$

即，$\begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$

记$K = \begin{pmatrix} 200 & 240 \\ 350 & 300 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

由矩阵的乘法，上述关系可以表述为$KC = L$.

问题转化为矩阵方程问题：已知矩阵K、L，求矩阵C，使得其满足$KC = L$.

1.3 矩阵的逆

按照解方程的想法，矩阵若可以做“除法”，两边同“除以”矩阵K，则可以得到矩阵C．

1.3 矩阵的逆

按照解方程的想法，矩阵若可以做“除法”，两边同“除以”矩阵K，则可以得到矩阵C .

但，已经知道了矩阵的乘法不满足消去律和交换律，即，不是所有的矩阵都可以做“除法”，自然的问题是：满足什么条件的矩阵才可以做“除法”？

1.3 矩阵的逆

按照解方程的想法，矩阵若可以做“除法”，两边同“除以”矩阵K，则可以得到矩阵C .

但，已经知道了矩阵的乘法不满足消去律和交换律，即，不是所有的矩阵都可以做“除法”，自然的问题是：满足什么条件的矩阵才可以做“除法”？

已熟知的数的运算中，除以一个数等于乘上这个数的倒数，而非零数a与其倒数$\frac{1}{a}$满足$a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

1.3 矩阵的逆

按照解方程的想法，矩阵若可以做“除法”，两边同“除以”矩阵K，则可以得到矩阵C .

但，已经知道了矩阵的乘法不满足消去律和交换律，即，不是所有的矩阵都可以做“除法”，自然的问题是：满足什么条件的矩阵才可以做“除法”？

已熟知的数的运算中，除以一个数等于乘上这个数的倒数，而非零数a与其倒数$\frac{1}{a}$满足$a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

而在矩阵的乘法中，单位矩阵I_m具有数的运算中1 的特征，即，任意的矩阵$A \in F^{m\times n}$，都有$I_m A = A = A I_n$.

1.3 矩阵的逆

按照解方程的想法，矩阵若可以做“除法”，两边同“除以”矩阵K，则可以得到矩阵C .

但，已经知道了矩阵的乘法不满足消去律和交换律，即，不是所有的矩阵都可以做“除法”，自然的问题是：满足什么条件的矩阵才可以做“除法”？

已熟知的数的运算中，除以一个数等于乘上这个数的倒数，而非零数a与其倒数$\frac{1}{a}$满足$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

而在矩阵的乘法中，单位矩阵I_m具有数的运算中1 的特征，即，任意的矩阵$A \in F^{m\times n}$ ，都有$I_mA = A = AI_n.$

自然的想法是：任意的矩阵A，能否找到矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n$$

1.3 矩阵的逆

定义1.6

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为**可逆矩阵**，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为**可逆矩阵**，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为可逆矩阵，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

行数与列数相同的矩阵称为方阵.

由$AB = BA = I_n$以及乘法规则，可逆矩阵只能是方阵.

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为可逆矩阵，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

行数与列数相同的矩阵称为方阵.

由$AB = BA = I_n$以及乘法规则，可逆矩阵只能是方阵.

方阵是不是一定可逆？

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为可逆矩阵，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

行数与列数相同的矩阵称为方阵.

由$AB = BA = I_n$以及乘法规则，可逆矩阵只能是方阵.

方阵是不是一定可逆?

例如：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个$2 \times 2$方阵，

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为可逆矩阵，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

行数与列数相同的矩阵称为方阵.

由$AB = BA = I_n$以及乘法规则，可逆矩阵只能是方阵.

方阵是不是一定可逆?

例如：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个$2 \times 2$方阵，则任意的$2 \times 2$方阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为可逆矩阵，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

行数与列数相同的矩阵称为方阵.

由$AB = BA = I_n$以及乘法规则，可逆矩阵只能是方阵.

方阵是不是一定可逆?

例如：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个$2 \times 2$方阵，则任意的$2 \times 2$方阵

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，都有

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

定义1.6 设A是一个矩阵，若存在矩阵B，满足

$$AB = BA = I_n,$$

则称A为可逆矩阵，称矩阵B为A逆矩阵，记作$B = A^{-1}$.

即，矩阵A 可逆时，有$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

行数与列数相同的矩阵称为方阵.

由$AB = BA = I_n$以及乘法规则，可逆矩阵只能是方阵.

方阵是不是一定可逆？

例如：设$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个$2 \times 2$方阵，则任意的$2 \times 2$方阵

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，都有

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} + c_{21} & c_{12} + c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1 A = I,$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 =$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I =$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$, $AB_2 = B_2A = I$,

从而$B_1 = B_1 I = B_1(AB_2) =$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 =$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 =$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$，

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$，

所以矩阵A的逆矩阵唯一.

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$， $AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$，

所以矩阵A的逆矩阵唯一.

(2)设A是可逆矩阵，则A^{-1} 也是可逆矩阵，且$(A^{-1})^{-1} = A$

1.3 矩阵的逆

显然，AC不可能是单位矩阵，即，不存在矩阵B，使得$AB = BA = I_n$ 成立.

所以矩阵A不是可逆矩阵.即不是所有的方阵都可逆.

问题是：什么样的方阵才可逆？可逆矩阵的逆矩阵怎么求？

(1)若矩阵A可逆，则A的逆矩阵唯一；

假设B_1, B_2是矩阵A的逆矩阵，即

$AB_1 = B_1A = I$，$AB_2 = B_2A = I$，

从而$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$，

所以矩阵A的逆矩阵唯一.

(2)设A是可逆矩阵，则A^{-1} 也是可逆矩阵，且$(A^{-1})^{-1} = A$

(3)设A是可逆矩阵，k 是非零数，则kA 也是可逆矩阵，且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$，只要验算AB、BA是单位矩阵.

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\tfrac{1}{k}A^{-1})=(k\tfrac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\tfrac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA)$,

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1} = B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = (k\frac{1}{k})(AA^{-1}) = 1 \cdot I = (\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} =$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I;$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA)$，

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$；

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I;$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA),$$

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I;$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=$$

1.3 矩阵的逆

验证矩阵A 是可逆矩阵，且$A^{-1}=B$ ，只要验算AB 、BA 是单位矩阵.

由矩阵的乘法以及数乘运算的性质，则

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1})=(k\frac{1}{k})(AA^{-1})=1\cdot I=(\frac{1}{k}A^{-1})(kA)$，

所以，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

(4)设A是可逆矩阵，则A^t也是可逆矩阵，且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

即，A可逆，则A^t也可逆，且转置的逆等于逆的转置.

(5)设A 、B 是两个同阶可逆矩阵，则AB 也是可逆矩阵，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

由矩阵乘法的结合律，则

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$；

$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$.

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{100} \\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

$$K^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{80} & \frac{1}{100}\\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120}\end{pmatrix}$$

在$KC=L$的两侧同时“左乘”K^{-1}，即$K^{-1}(KC)=K^{-1}L$，得$C=K^{-1}L$.

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{100} \\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix}$$

在$KC = L$的两侧同时“左乘”K^{-1}，即$K^{-1}(KC) = K^{-1}L$，得$C = K^{-1}L$.

$$C = K^{-1}L$$

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{100} \\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix}$$

在$KC = L$的两侧同时“左乘”K^{-1}，即$K^{-1}(KC) = K^{-1}L$，得$C = K^{-1}L$.

$$C = K^{-1}L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{100} \\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 & 68 \\ 870 & 95 \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

$$K^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{80} & \frac{1}{100}\\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120}\end{pmatrix}$$

在$KC=L$的两侧同时“左乘”K^{-1}，即$K^{-1}(KC)=K^{-1}L$，得$C=K^{-1}L$.

$$C=K^{-1}L=\begin{pmatrix}-\frac{1}{80} & \frac{1}{100}\\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600 & 68\\ 870 & 95\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.2 & 0.1\\ 1.5 & 0.2\end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

下面给一些可逆矩阵以及矩阵逆的应用例子.

在例1.4中，矩阵K是可逆矩阵，可以直接验证

$$K^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{80} & \frac{1}{100}\\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120}\end{pmatrix}$$

在$KC=L$的两侧同时“左乘”K^{-1}，即$K^{-1}(KC)=K^{-1}L$，得$C=K^{-1}L$.

$$C=K^{-1}L=\begin{pmatrix}-\frac{1}{80} & \frac{1}{100}\\ \frac{7}{480} & -\frac{1}{120}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600 & 68\\ 870 & 95\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.2 & 0.1\\ 1.5 & 0.2\end{pmatrix}$$

即，销往甲地的单位价格为1.2，单位利润为0.1，销往乙地的单位价格为1.5，单位利润为0.2.

1.3 矩阵的逆

例1.5 计算验证，下列矩阵都是可逆矩阵，且逆矩阵为相应的给定矩阵.

1.3 矩阵的逆

例1.5 计算验证，下列矩阵都是可逆矩阵，且逆矩阵为相应的给定矩阵.

(1)设K是由非零数k 所确定的$n \times n$阶数量矩阵，

1.3 矩阵的逆

例1.5 计算验证，下列矩阵都是可逆矩阵，且逆矩阵为相应的给定矩阵.

(1)设K是由非零数k 所确定的$n \times n$阶数量矩阵，即

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

1.3 矩阵的逆

例1.5 计算验证，下列矩阵都是可逆矩阵，且逆矩阵为相应的给定矩阵.

(1)设K是由非零数k 所确定的$n \times n$阶数量矩阵，即

$$K = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

则K是可逆矩阵，且K^{-1}是由$\frac{1}{k}$确定的数量矩阵，

1.3 矩阵的逆

例1.5 计算验证，下列矩阵都是可逆矩阵，且逆矩阵为相应的给定矩阵.

(1)设K是由非零数k 所确定的$n\times n$阶数量矩阵，即

$$K=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

则K是可逆矩阵，且K^{-1}是由$\frac{1}{k}$确定的数量矩阵，即

$$K^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1} = I$.

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1} = I$.

(2)设$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1} = I$.

(2)设$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1$，

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1}=I$.

(2)设$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=P_1$，

即，$P_1^2=I_3$；

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1} = I$.

(2)设$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1$，

即，$P_1^2 = I_3$；

具有P_1这种性质的矩阵，称为对合矩阵.

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1}=I$.

(2)设$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=P_1$，

即，$P_1^2=I_3$；

具有P_1这种性质的矩阵，称为对合矩阵.

即，若$A^{-1}=A$，也就是$A^2=I$，称A是对合矩阵.

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1}=I$.

(2)设$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=P_1$，

即，$P_1^2=I_3$；

具有P_1这种性质的矩阵，称为对合矩阵.

即，若$A^{-1}=A$，也就是$A^2=I$，称A是对合矩阵.

下列矩阵都是“对合矩阵”

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1}=I$.

(2)设$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=P_1$，

即，$P_1^2=I_3$；

具有P_1这种性质的矩阵，称为对合矩阵.

即，若$A^{-1}=A$，也就是$A^2=I$，称A是对合矩阵.

下列矩阵都是“对合矩阵”

$$P_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1}=I$.

(2)设$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=P_1$，

即，$P_1^2=I_3$；

具有P_1这种性质的矩阵，称为对合矩阵.

即，若$A^{-1}=A$，也就是$A^2=I$，称A是对合矩阵.

下列矩阵都是“对合矩阵”

$$P_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

1.3 矩阵的逆

特别地，单位矩阵I是可逆矩阵，且$I^{-1} = I$.

(2)设$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_1$，

即，$P_1^2 = I_3$；

具有P_1这种性质的矩阵，称为对合矩阵.

即，若$A^{-1} = A$，也就是$A^2 = I$，称A是对合矩阵.

下列矩阵都是“对合矩阵”

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

(3)矩阵

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1.3 矩阵的逆

(3)矩阵

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

(3)矩阵

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

都是可逆矩阵，且

1.3 矩阵的逆

(3)矩阵

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

都是可逆矩阵，且

$$P_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1.3 矩阵的逆

(3)矩阵

$$P_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

都是可逆矩阵，且

$$P_5^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_6^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

例1.6 设有三元一次线性方程组$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$

1.3 矩阵的逆

例1.6 设有三元一次线性方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$

若我们引入矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

1.3 矩阵的逆

例1.6 设有三元一次线性方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$

若我们引入矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

利用矩阵的相等关系和乘法，三元一次线性方程组可以表成$AX=b$，即线性方程组可以用矩阵的乘法表示为

1.3 矩阵的逆

例1.6 设有三元一次线性方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$

若我们引入矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

利用矩阵的相等关系和乘法，三元一次线性方程组可以表成$AX=b$，即线性方程组可以用矩阵的乘法表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX = b$ 成立.

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX = b$ 成立. 这里，A是可逆矩阵，且利用Matlab可以计算出

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX=b$ 成立. 这里，A是可逆矩阵，且利用Matlab可以计算出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX=b$ 成立. 这里，A是可逆矩阵，且利用Matlab可以计算出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

在$AX=b$的两边同时“左乘”A^{-1}，有

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX=b$ 成立. 这里，A是可逆矩阵，且利用Matlab可以计算出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

在$AX=b$的两边同时“左乘”A^{-1}，有

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX=b$ 成立. 这里，A是可逆矩阵，且利用Matlab可以计算出

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

在$AX=b$的两边同时“左乘”A^{-1}，有

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

得$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

1.3 矩阵的逆

因而解上述线性方程组，就是要求矩阵X，使得$AX = b$ 成立. 这里，A是可逆矩阵，且利用Matlab可以计算出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

在$AX = b$的两边同时“左乘”A^{-1}，有

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

得$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，即，$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ 是方程组的解。

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com