线性代数
第二章：线性方程组

宿州学院　数学与统计学院

目录

2.1 一般线性方程组

现实世界中的量的关系大都可以用线性方程组描述.

2.1 一般线性方程组

现实世界中的量的关系大都可以用线性方程组描述.例如,

1.(电路网络问题) 当电流经过电阻(如灯泡或发电机等)时,会产生“电压降”。根据欧姆定律:$U = I \cdot R$, 其中U为电阻两端的“电压降”单位:伏特),I为流经电阻的电流强度(单位:安培),R 为电阻值(单位:欧姆)。

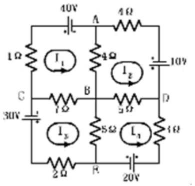
2.1 一般线性方程组

现实世界中的量的关系大都可以用线性方程组描述.例如,

1.(电路网络问题) 当电流经过电阻(如灯泡或发电机等)时,会产生“电压降”。根据欧姆定律：$U = I \cdot R$，其中U为电阻两端的“电压降”单位：伏特)，I为流经电阻的电流强度(单位：安培)，R 为电阻值(单位：欧姆)。在电路网络中，任何一个闭合回路的电流服从希尔霍夫电压定律，即，沿某个方向环绕回路一周的所有电压降U的代数和等于沿同一方向环绕该回路的电源电压的代数和。

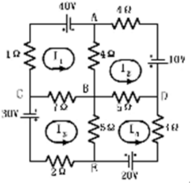
2.1 一般线性方程组

下图是带有四个回路的一个电路网络.



2.1 一般线性方程组

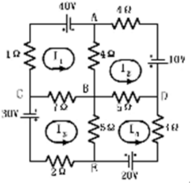
下图是带有四个回路的一个电路网络.



利用希尔霍夫电压定律，可得图中回路电流所满足的关系式.

2.1 一般线性方程组

下图是带有四个回路的一个电路网络.

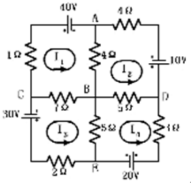


利用希尔霍夫电压定律，可得图中回路电流所满足的关系式.

在(I_1)回路中，电流I_1流经三个电阻，其电压降为：

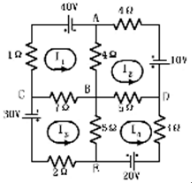
$$I_1 + 7I_1 + 4I_1 = 12I_1;$$

2.1 一般线性方程组



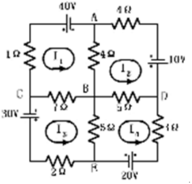
回路(I_2)中的电流I_2也流经回路(I_1)的一部分，即从A 到B 的分支，对应的电压降为$-4I_2$ ；

2.1 一般线性方程组



回路(I_2)中的电流I_2也流经回路(I_1)的一部分，即从A 到B 的分支，对应的电压降为$-4I_2$ ；同样，回路(I_3)中的电流I_3也流经回路(I_1)的一部分，即从B 到C的分支，对应的电压降为$-7I_3$.

2.1 一般线性方程组

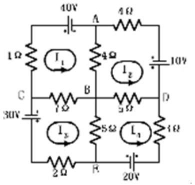


回路(I_2)中的电流I_2也流经回路(I_1)的一部分，即从A 到B 的分支，对应的电压降为$-4I_2$ ；同样，回路(I_3)中的电流I_3也流经回路(I_1)的一部分，即从B 到C的分支，对应的电压降为$-7I_3$.

回路(I_1)中电源电压为40 ，由希尔霍夫定律得：

$$12I_1 - 4I_2 - 7I_3 = 40;$$

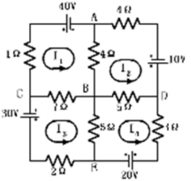
2.1 一般线性方程组



同理，有

回路(I_1)满足：$12I_1 - 4I_2 - 7I_3 = 40;$

2.1 一般线性方程组

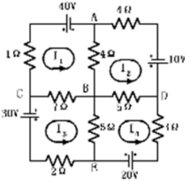


同理，有

回路(I_1)满足：$12I_1 - 4I_2 - 7I_3 = 40;$

回路(I_2)满足：$-4I_1 + 13I_2 - 5I_4 = -10;$

2.1 一般线性方程组



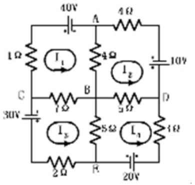
同理，有

回路(I_1)满足：$12I_1 - 4I_2 - 7I_3 = 40;$

回路(I_2)满足：$-4I_1 + 13I_2 - 5I_4 = -10;$

回路(I_3)满足：$-7I_1 + 15I_2 - 6I_4 = 30;$

2.1 一般线性方程组



同理，有

回路(I_1)满足：$12I_1 - 4I_2 - 7I_3 = 40;$

回路(I_2)满足：$-4I_1 + 13I_2 - 5I_4 = -10;$

回路(I_3)满足：$-7I_1 + 15I_2 - 6I_4 = 30;$

回路(I_4)满足：$-5I_2 - 6I_3 + 14I_4 = 20;$

2.1 一般线性方程组

于是，回路电流所满足的关系式是:

$$\begin{cases} 12I_1-4I_2-7I_3 & = 40 \\ -4I_1+13I_2-5I_4 & = -10 \\ -7I_1+15I_3-6I_4 & = 30 \\ -5I_2-6I_3+14I_4 & = 20 \end{cases}$$

2.1 一般线性方程组

于是，回路电流所满足的关系式是:

$$\begin{cases} 12I_1-4I_2-7I_3 & = 40 \\ -4I_1+13I_2-5I_4 & = -10 \\ -7I_1+15I_3-6I_4 & = 30 \\ -5I_2-6I_3+14I_4 & = 20 \end{cases}$$

就是一个含I_1，I_2，I_3，I_4的线性方程组.

2.1 一般线性方程组

于是，回路电流所满足的关系式是:

$$\begin{cases} 12I_1-4I_2-7I_3 & = 40 \\ -4I_1+13I_2-5I_4 & = -10 \\ -7I_1+15I_3-6I_4 & = 30 \\ -5I_2-6I_3+14I_4 & = 20 \end{cases}$$

就是一个含I_1, I_2, I_3, I_4的线性方程组.若记

$$A=\begin{pmatrix} 12 & -4 & -7 & 0 \\ -4 & 13 & 0 & -5 \\ -7 & 0 & 15 & -6 \\ 0 & -5 & -6 & 14 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2.1 一般线性方程组

于是，回路电流所满足的关系式是:

$$\begin{cases} 12I_1-4I_2-7I_3 & = 40 \\ -4I_1+13I_2-5I_4 & = -10 \\ -7I_1+15I_3-6I_4 & = 30 \\ -5I_2-6I_3+14I_4 & = 20 \end{cases}$$

就是一个含I_1，I_2，I_3，I_4的线性方程组.若记

$$A=\begin{pmatrix} 12 & -4 & -7 & 0 \\ -4 & 13 & 0 & -5 \\ -7 & 0 & 15 & -6 \\ 0 & -5 & -6 & 14 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

由矩阵的乘法和矩阵的相等，上述方程可以用矩阵表示为$AX=b$.

2.1 一般线性方程组

矩阵A的第i行j列的元素a_{ij}就是方程组中第i个方程中第j个未知量I_j的系数，称为方程组的系数矩阵.

2.1 一般线性方程组

矩阵A的第i行j列的元素a_{ij}就是方程组中第i个方程中第j个未知量I_j的系数，称为方程组的系数矩阵.

X为未知量列；b是常数项构成的常数列.

2.1 一般线性方程组

矩阵A的第i行j列的元素a_{ij}就是方程组中第i个方程中第j个未知量I_j的系数，称为方程组的系数矩阵.

X为未知量列；b是常数项构成的常数列.

2.(诺贝尔经济学奖的数学模型)

2.1 一般线性方程组

矩阵A的第i行j列的元素a_{ij}就是方程组中第i个方程中第j个未知量I_j的系数，称为方程组的系数矩阵.

X为未知量列；b是常数项构成的常数列.

2.(诺贝尔经济学奖的数学模型)华西里·里昂惕夫(Wassily Leontief)是1930年移居美国的原苏联籍经济学家，因其发展了投入产出分析方法在经济领域产生的重大作用，而被授予1973年的诺贝尔经济学奖.投入产出模型的基本思想是：假设一个国家的经济分为很多行业(如制造业、通讯业、娱乐业和服务行业等)，我们把一个部门产出的总货币价值称为该产出的价格(price). 若知道每个部门一年的总产出，并准确了解其产出如何在经济的其它部门之间分配或"交易".华西里·里昂惕夫证明了如下结论：存在赋给各部门总产出的平衡价格，使得每个部门的投入与产出都相等.

2.1 一般线性方程组

假设一个经济系统有三个行业：五金化工、能源、机械，每个行业的产出在各个行业中的分配见表1，每一列中的元素表示占该行业总产出的比例.以第二列为例，能源行业的总产出的分配如下：80%分配到五金化工行业，10%分配到机械行业，10%供给到自身行业使用.

表 1　经济系统的平衡

产出分配			购买者
五金化工	能源	机械	
0.2	0.8	0.4	五金化工
0.3	0.1	0.4	能源
0.5	0.1	0.2	机械

2.1 一般线性方程组

将五金化工、能源、机械行业每年总产出的价格分别用p_1，p_2，p_3表示. 表1的列表示每个行业的产出分配到何处，行表示每个行业所需的投入.

2.1 一般线性方程组

将五金化工、能源、机械行业每年总产出的价格分别用p_1, p_2, p_3表示. 表1的列表示每个行业的产出分配到何处，行表示每个行业所需的投入.

例如，第一行说明五金化工行业购买了20%的本行业产出，80%的能源产出和40%的机械产出，因此五金化工行业必须分别向三个行业支付$0.2p_1$, $0.8p_2$, $0.4p_3$元.五金化工行业的总支出为$0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$.

2.1 一般线性方程组

将五金化工、能源、机械行业每年总产出的价格分别用p_1，p_2，p_3表示. 表1的列表示每个行业的产出分配到何处，行表示每个行业所需的投入.

例如，第一行说明五金化工行业购买了20%的本行业产出，80%的能源产出和40%的机械产出，因此五金化工行业必须分别向三个行业支付$0.2p_1$，$0.8p_2$，$0.4p_3$元.五金化工行业的总支出为$0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$.

为了使五金化工行业的收入等于它的支出，依据华西里·里昂惕夫的模型，就有：

第一行：$p_1=0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$；

2.1 一般线性方程组

将五金化工、能源、机械行业每年总产出的价格分别用p_1，p_2，p_3表示. 表1的列表示每个行业的产出分配到何处，行表示每个行业所需的投入.

例如，第一行说明五金化工行业购买了20%的本行业产出，80%的能源产出和40%的机械产出，因此五金化工行业必须分别向三个行业支付$0.2p_1$，$0.8p_2$，$0.4p_3$元.五金化工行业的总支出为$0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$.

为了使五金化工行业的收入等于它的支出，依据华西里·里昂惕夫的模型，就有：

第一行：$p_1=0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$；

第二行：$p_2=0.3p_1+0.1p_2+0.4p_3$；

2.1 一般线性方程组

将五金化工、能源、机械行业每年总产出的价格分别用p_1，p_2，p_3表示．表1的列表示每个行业的产出分配到何处，行表示每个行业所需的投入．

例如，第一行说明五金化工行业购买了20%的本行业产出，80%的能源产出和40%的机械产出，因此五金化工行业必须分别向三个行业支付$0.2p_1$，$0.8p_2$，$0.4p_3$元.五金化工行业的总支出为$0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$.

为了使五金化工行业的收入等于它的支出，依据华西里・里昂惕夫的模型，就有：

第一行：$p_1=0.2p_1+0.8p_2+0.4p_3$；

第二行：$p_2=0.3p_1+0.1p_2+0.4p_3$；

第三行：$p_3=0.5p_1+0.1p_2+0.2p_3$；

2.1 一般线性方程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

2.1 一般线性方程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这是关于未知数p_1，p_2，p_3的线性方程组，整理得

$$\begin{cases} 0.8p_1 - 0.8p_2 - 0.4p_3 &= 0 \\ 0.3p_1 - 0.9p_2 + 0.4p_3 &= 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 - 0.8p_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

2.1 一般线性方程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这是关于未知数p_1，p_2，p_3的线性方程组，整理得

$$\begin{cases} 0.8p_1 - 0.8p_2 - 0.4p_3 &= 0 \\ 0.3p_1 - 0.9p_2 + 0.4p_3 &= 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 - 0.8p_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2)是(1)的同解变形，

2.1 一般线性方程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这是关于未知数p_1，p_2，p_3的线性方程组，整理得

$$\begin{cases} 0.8p_1 - 0.8p_2 - 0.4p_3 &= 0 \\ 0.3p_1 - 0.9p_2 + 0.4p_3 &= 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 - 0.8p_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2)是(1)的同解变形，即，使(1)成立的p_1，p_2，p_3的取值，都能使(2)成立；且使(2)成立的p_1，p_2，p_3的取值，都能使(1)成立.

2.1 一般线性方程组

所以，

$$\begin{cases} p_1 &= 0.2p_1 + 0.8p_2 + 0.4p_3 \\ p_2 &= 0.3p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_3 &= 0.5p_1 + 0.1p_2 + 0.2p_3 \end{cases} \qquad (1)$$

这是关于未知数p_1，p_2，p_3的线性方程组，整理得

$$\begin{cases} 0.8p_1 - 0.8p_2 - 0.4p_3 &= 0 \\ 0.3p_1 - 0.9p_2 + 0.4p_3 &= 0 \\ 0.5p_1 + 0.1p_2 - 0.8p_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2)是(1)的同解变形，即，使(1)成立的p_1，p_2，p_3的取值，都能使(2)成立；且使(2)成立的p_1，p_2，p_3的取值，都能使(1)成立.称这样的方程组是同解的，也说他们是等价的.

2.1 一般线性方程组

(2)的系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.8 & -0.4 \\ 0.3 & -0.9 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & -0.8 \end{pmatrix}$，

未知量列为$X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$，常数列为$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

方程组(2)矩阵表示：$AX = 0.$

2.1 一般线性方程组

(2)的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.8 & -0.4 \\ 0.3 & -0.9 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & -0.8 \end{pmatrix}$,

未知量列为$X=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$，常数列为$0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

方程组(2)矩阵表示：$AX=0$.

一般地，

设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是n个未知量，$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$是$n+1$个已知数，称等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

为关于未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的n元线性方程.

2.1 一般线性方程组

由m个关于未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的n元线性方程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k,\quad k = 1, 2, ..., m$$

组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

称为n个未知量，m个方程的线性方程组.

2.1 一般线性方程组

由m个关于未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的n元线性方程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = 1, 2, ..., m$$

组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \qquad (3)$$

称为n个未知量，m个方程的线性方程组. a_{ij}是第i个方程中x_j的系数.

2.1 一般线性方程组

特别，若常数$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$，即，方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

称为关于未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的齐次线性方程组.

2.1 一般线性方程组

特别，若常数$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$，即，方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

称为关于未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的齐次线性方程组.

若未知量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的一组取值$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$可以使(3)中

的每一个方程都成立，即

$$a_{k1}c_1 + a_{k2}c_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \quad k = 1, 2, ..., m$$

2.1 一般线性方程组

则称 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 为线性方程组(3)的一个解.

2.1 一般线性方程组

则称 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 为线性方程组(3)的一个解.

由矩阵的相等, $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$

2.1 一般线性方程组

则称 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 为线性方程组(3)的一个解.

由矩阵的相等, $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$

当 $\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$ 是线性方程组(3)的一个解时，称 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 为线性方程组(3)的一个解向量.

2.1 一般线性方程组

由于 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 一定是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

的一个解，称为(4)的一个平凡解，也称为零解.

2.1 一般线性方程组

若存在不全为0的数$c_1, c_2, \ldots, c_n$，使得$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

的一个解，称其为(4)的一个非平凡解，也称非零解.

2.1 一般线性方程组

问题是：

一般的线性方程组(3)在什么情况下有解？什么情况下无解？ 在有解时，有多少解？不止一个解时，解的一般形式或结构会是什么样子？

2.1 一般线性方程组

问题是：

一般的线性方程组(3)在什么情况下有解？什么情况下无解？ 在有解时，有多少解？不止一个解时，解的一般形式或结构会是什么样子？

齐次线性方程组(4)在什么情况下存在非平凡(非零)解？解的结构又是什么样子？

2.1 一般线性方程组

问题是:

一般的线性方程组(3)在什么情况下有解？什么情况下无解？ 在有解时，有多少解？不止一个解时，解的一般形式或结构会是什么样子？

齐次线性方程组(4)在什么情况下存在非平凡(非零)解？解的结构又是什么样子？

为了解决这些问题，除矩阵以及矩阵的初等变换等工具外，我们还需要数组向量等数学工具.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com