线性代数
第三章：向量空间

宿州学院　数学与统计学院

目录

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)的本质区别可以从以下三个方面刻画

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)的本质区别可以从以下三个方面刻画

1.从线性组合看(向量组线性相关性的定义)

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)的本质区别可以从以下三个方面刻画

1.从线性组合看(向量组线性相关性的定义)

(1)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的系数$k_1, k_2, ..., k_m$，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)的本质区别可以从以下三个方面刻画

1.从线性组合看(向量组线性相关性的定义)

(1)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的系数$k_1, k_2, ..., k_m$，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$.

(2) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关$\Leftrightarrow$ 只有系数$k_1, k_2, ..., k_m$全为零时，才有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

2.从线性表出看

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

2.从线性表出看

(1)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可以由其余的向量线性表出.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

2.从线性表出看

(1)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可以由其余的向量线性表出.

(2)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性无关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中每一个向量都不可以由其余的向量线性表出.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

2.从线性表出看

(1)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$ 线性相关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可以由其余的向量线性表出.

(2)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$ 线性无关$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 中每一个向量都不可以由其余的向量线性表出.

给出(1)的证明，以帮助同学理解线性相关性的概念.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

(1)证明 充分性

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

(1)证明 充分性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$中存在向量α_k可以由其余的向量线性表出，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

(1)证明 充分性

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$中存在向量α_k可以由其余的向量线性表出，即，存在系数$l_1,,\ldots,l_{k-1},l_{k+1},\ldots,l_m$，使得

$$\alpha_k=l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_m\alpha_m,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

(1)证明 充分性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$中存在向量α_k可以由其余的向量线性表出，即，存在系数$l_1, , \ldots, l_{k-1}, l_{k+1}, \ldots, l_m$，使得

$$\alpha_k = l_1\alpha_1 + \cdots + l_{k-1}\alpha_{k-1} + l_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + l_m\alpha_m,$$

两边同时加上α_k 的负向量$(-\alpha_k)$，得

$$l_1\alpha_1 + \cdots + l_{k-1}\alpha_{k-1} + (-1)\alpha_k + l_{k+1}\alpha_{k+1} + \cdots + l_m\alpha_m = 0,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

(1)证明 充分性

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$中存在向量α_k可以由其余的向量线性表出，即，存在系数$l_1,,\ldots,l_{k-1},l_{k+1},\ldots,l_m$，使得

$$\alpha_k=l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_m\alpha_m,$$

两边同时加上α_k 的负向量$(-\alpha_k)$ ，得

$$l_1\alpha_1+\cdots+l_{k-1}\alpha_{k-1}+(-1)\alpha_k+l_{k+1}\alpha_{k+1}+\cdots+l_m\alpha_m=0,$$

系数中至少有一个$-1\neq 0$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

必要性

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

必要性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

必要性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，则存在不全为零的系数$k_1, k_2, ..., k_m$ ，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

必要性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，则存在不全为零的系数$k_1, k_2, ..., k_m$ ，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

由于$k_1, k_2, ..., k_m$ 不全为零，所以至少存在$k_i \neq 0$，从而，

$$-k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

必要性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，则存在不全为零的系数$k_1, k_2, ..., k_m$ ，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

由于$k_1, k_2, ..., k_m$ 不全为零，所以至少存在$k_i \neq 0$，从而，

$$-k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m,$$

两边同乘k_i的倒数得

$$\alpha_i = (-\frac{k_1}{k_i})\alpha_1 + \cdots + (-\frac{k_{i-1}}{k_i})\alpha_{i-1} + (-\frac{k_{i+1}}{k_i})\alpha_{i+1} + \cdots + (-\frac{k_m}{k_i})\alpha_m.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

必要性

设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，则存在不全为零的系数$k_1, k_2, ..., k_m$ ，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0.$$

由于$k_1, k_2, ..., k_m$ 不全为零，所以至少存在$k_i \neq 0$，从而，

$$-k_i\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m,$$

两边同乘k_i的倒数得

$$\alpha_i = (-\frac{k_1}{k_i})\alpha_1 + \cdots + (-\frac{k_{i-1}}{k_i})\alpha_{i-1} + (-\frac{k_{i+1}}{k_i})\alpha_{i+1} + \cdots + (-\frac{k_m}{k_i})\alpha_m.$$

即,存在向量α_i 可以由其余的向量$\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_m$ 线性表出.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：线性相关的向量组，存在不全为零的系数使其组合为零，而系数不为零的那个向量就可以由其余的向量线性表出.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：线性相关的向量组，存在不全为零的系数使其组合为零，而系数不为零的那个向量就可以由其余的向量线性表出.

3.从齐次线性方程组看

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：线性相关的向量组，存在不全为零的系数使其组合为零，而系数不为零的那个向量就可以由其余的向量线性表出.

3.从齐次线性方程组看

(1)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$有非零解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：线性相关的向量组，存在不全为零的系数使其组合为零，而系数不为零的那个向量就可以由其余的向量线性表出.

3.从齐次线性方程组看

(1)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$有非零解.

(2)向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$只有零解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是F^n中的向量组，由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中的某些向量构成的向量组称为它的一个**部分组**.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是F^n中的向量组，由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中的某些向量构成的向量组称为它的一个部分组.

例3.3 若向量组的一个部分组线性相关，则整个向量组也线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是F^n中的向量组，由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 中的某些向量构成的向量组称为它的一个部分组.

例3.3 若向量组的一个部分组线性相关，则整个向量组也线性相关.

比如，若$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个线性相关的部分组，则存在不全为0的系数$l_1,l_3,l_4$，使得

$$l_1\alpha_1+l_3\alpha_3+l_4\alpha_4=0$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是F^n中的向量组，由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 中的某些向量构成的向量组称为它的一个部分组.

例3.3 若向量组的一个部分组线性相关，则整个向量组也线性相关.

比如，若$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个线性相关的部分组，则存在不全为0的系数$l_1,l_3,l_4$，使得

$$l_1\alpha_1+l_3\alpha_3+l_4\alpha_4=0$$

所以，存在不全为0的系数$l_1,0,l_3,l_4,0$，满足

$l_1\alpha_1+0\alpha_2+l_3\alpha_3+l_4\alpha_4+0\alpha_5=$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是F^n中的向量组，由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中的某些向量构成的向量组称为它的一个部分组.

例3.3 若向量组的一个部分组线性相关，则整个向量组也线性相关.

比如，若$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$的一个线性相关的部分组，则存在不全为0的系数$l_1, l_3, l_4$，使得

$$l_1\alpha_1 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha_4 = 0$$

所以，存在不全为0的系数$l_1, 0, l_3, l_4, 0$，满足

$$l_1\alpha_1 + 0\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha_4 + 0\alpha_5 = l_1\alpha_1 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha_4 = 0$$

所以，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 是F^n中的向量组，由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 中的某些向量构成的向量组称为它的一个部分组.

例3.3 若向量组的一个部分组线性相关，则整个向量组也线性相关.

比如，若$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个线性相关的部分组，则存在不全为0的系数$l_1,l_3,l_4$，使得

$$l_1\alpha_1+l_3\alpha_3+l_4\alpha_4=0$$

所以，存在不全为0的系数$l_1,0,l_3,l_4,0$，满足

$$l_1\alpha_1+0\alpha_2+l_3\alpha_3+l_4\alpha_4+0\alpha_5=l_1\alpha_1+l_3\alpha_3+l_4\alpha_4=0$$

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$线性相关.

更一般的证明同学们可以自行看书.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：

① 例3.3的逆否命题：线性无关的向量组的部分组一定线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：

① 例3.3的逆否命题：线性无关的向量组的部分组一定线性无关. 通俗地表述为：

部分相关，整体一定相关；整体无关，部分一定无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：

① 例3.3的逆否命题：线性无关的向量组的部分组一定线性无关. 通俗地表述为：

部分相关，整体一定相关；整体无关，部分一定无关.

② 例3.3的逆命题不成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注:

① 例3.3的逆否命题:线性无关的向量组的部分组一定线性无关. 通俗地表述为:

部分相关,整体一定相关;整体无关,部分一定无关.

② 例3.3的逆命题不成立. 即

整体线性相关,部分未必线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：

① 例3.3的逆否命题：线性无关的向量组的部分组一定线性无关. 通俗地表述为：

部分相关，整体一定相关；整体无关，部分一定无关.

② 例3.3的逆命题不成立. 即

整体线性相关，部分未必线性相关.

如$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$是线性相关的，但它含有两个向量的部分组都是线性无关的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.4 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$F^n$中线性无关的向量组，且

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

证明：向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.4 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性无关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性无关.

证明 要证明β_1,β_2,β_3也线性无关，就是要证明由组合 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 一定可以推出系数$k_1=k_2=k_3=0$，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.4 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性无关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性无关.

证明 要证明β_1,β_2,β_3也线性无关，就是要证明由组合 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 一定可以推出系数$k_1=k_2=k_3=0$，而 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.4 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性无关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性无关.

证明 要证明β_1,β_2,β_3也线性无关，就是要证明由组合 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 一定可以推出系数$k_1=k_2=k_3=0$，而 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

所以

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3 \quad =k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.4 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$F^n$中线性无关的向量组，且

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

证明：向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性无关.

证明 要证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$也线性无关，就是要证明由组合 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 一定可以推出系数$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，而 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$

所以

$$\begin{aligned} k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 &= k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) \\ &= (k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.4 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性无关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性无关.

证明 要证明β_1,β_2,β_3也线性无关，就是要证明由组合$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 一定可以推出系数$k_1=k_2=k_3=0$，而$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

所以

$$\begin{aligned} k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3 &= k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1) \\ &= (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3 \end{aligned}$$

从而，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0 \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

解关于k_1, k_2, k_3的齐次线性方程组.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$$

解关于k_1,k_2,k_3的齐次线性方程组.将其系数矩阵进行初等行变换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0 \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解关于k_1, k_2, k_3的齐次线性方程组.将其系数矩阵进行初等行变换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0 \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解关于k_1, k_2, k_3的齐次线性方程组.将其系数矩阵进行初等行变换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0 \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解关于k_1, k_2, k_3的齐次线性方程组.将其系数矩阵进行初等行变换，化成阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵中有3个主元，等于方程组未知量个数，齐次线性方程组只有零解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

所以$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

所以β_1,β_2,β_3线性无关.

例3.5 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性相关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

所以$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

例3.5 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$F^n$中线性相关的向量组，且

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

证明：向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性相关.

证明

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

所以$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

例3.5 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是$F^n$中线性相关的向量组，且

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$$

证明：向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性相关.

证明 要证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关，就是要找到不全为0的系数k_1, k_2, k_3 ，使得$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

所以β_1,β_2,β_3线性无关.

例3.5 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性相关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性相关.

证明 要证明β_1,β_2,β_3 线性相关，就是要找到不全为0的系数k_1,k_2,k_3 ，使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 成立.

而$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 所以，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3\quad=k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

所以β_1,β_2,β_3线性无关.

例3.5 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$F^n$中线性相关的向量组，且

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

证明：向量组β_1,β_2,β_3 也线性相关.

证明 要证明β_1,β_2,β_3 线性相关，就是要找到不全为0的系数k_1,k_2,k_3 ，使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 成立.
而$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 所以，

$$\begin{aligned}k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3 &= k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)\\ &=(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3\end{aligned},$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

从而，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

从而,

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以存在不全为零的系数 l_1,l_2,l_3，使得$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$ 成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

从而，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以存在不全为零的系数 l_1,l_2,l_3，使得$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1+k_3=l_1 \\ k_1+k_2=l_2 \\ k_2+k_3=l_3 \end{cases} \qquad (*)$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

从而，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以存在不全为零的系数 l_1,l_2,l_3，使得$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1+k_3=l_1 \\ k_1+k_2=l_2 \\ k_2+k_3=l_3 \end{cases} \qquad (*)$$

则满足上述方程组的系数k_1,k_2,k_3，可以使

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$$

成立，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

从而，

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0 \Leftrightarrow (k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，所以存在不全为零的系数 l_1,l_2,l_3，使得$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$ 成立. 取

$$\begin{cases} k_1+k_3=l_1 \\ k_1+k_2=l_2 \\ k_2+k_3=l_3 \end{cases} \qquad (*)$$

则满足上述方程组的系数k_1,k_2,k_3 ，可以使

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3=0$$

成立，从而使 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$ 成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

方程组$(*)$是关于k_1, k_2, k_3 的线性方程组，对其增广矩阵进行初等行变换，化为阶梯形

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

方程组$(*)$是关于k_1, k_2, k_3 的线性方程组，对其增广矩阵进行初等行变换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

方程组$(*)$是关于k_1,k_2,k_3 的线性方程组，对其增广矩阵进行初等行变换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

方程组$(*)$是关于k_1, k_2, k_3 的线性方程组，对其增广矩阵进行初等行变换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

方程组$(*)$是关于k_1, k_2, k_3 的线性方程组，对其增广矩阵进行初等行变换，化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 1 & 1 & l_3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的主元个数等于未知量个数，方程组有唯一解.再将阶梯形矩阵经初等行变换化为规范阶梯形

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 2 & l_3 - l_2 + l_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 1 & -1 & l_2 - l_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{pmatrix}$$

从而关于k_1, k_2, k_3线性方程组$(*)$的解为

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

时，可以使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$成立.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

时，可以使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$成立.

要证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关，还需要证明

$$k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3), k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1), k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1)$$

不全为零.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即当

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

时，可以使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$成立.

要证明$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性相关，还需要证明

$$k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3), k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1), k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1)$$

不全为零.

反证. 若

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) = 0 \\ \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) = 0 \\ \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) = 0 \end{cases}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$(**)$是关于l_1, l_2, l_3 齐次线性方程组，将其系数矩阵经过初等行变换化为阶梯形

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$(**)$是关于l_1, l_2, l_3 齐次线性方程组，将其系数矩阵经过初等行变换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$(**)$是关于l_1, l_2, l_3 齐次线性方程组，将其系数矩阵经过初等行变换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$(**)$是关于l_1, l_2, l_3 齐次线性方程组，将其系数矩阵经过初等行变换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即

$$\begin{cases} l_1 + l_2 - l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ l_1 - l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

$(**)$是关于l_1, l_2, l_3 齐次线性方程组，将其系数矩阵经过初等行变换化为阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的主元个数为3，与未知量个数相等，方程组只有零解，这与l_1, l_2, l_3 不全为0矛盾.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

所以，存在不全为零的系数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

使$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 成立，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

所以，存在不全为零的系数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

使$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 成立，即$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

所以，存在不全为零的系数

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 - l_3) \\ k_2 = \frac{1}{2}(l_3 + l_2 - l_1) \\ k_3 = \frac{1}{2}(l_3 - l_2 + l_1) \end{cases}$$

使$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 成立，即$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

注：例3.4和例3.5给出了证明向量组线性无关或线性相关的基本思路和方法，它们之间的区别也恰恰体现了这两个概念之间的差异，希望同学们能体会出两者之间证明的差异.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

解

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

解 在例3.2中，构作以向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量的矩阵，并进行初等行变换，将其化为阶梯形之后，得到了向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性相关的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

解 在例3.2中，构作以向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量的矩阵，并进行初等行变换，将其化为阶梯形之后，得到了向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性相关的.

对已得到的阶梯形矩阵再进一步进行初等行变换，将其化为规范阶梯形

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

解 在例3.2中，构作以向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量的矩阵，并进行初等行变换，将其化为阶梯形之后，得到了向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性相关的.

对已得到的阶梯形矩阵再进一步进行初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

解 在例3.2中，构作以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量的矩阵，并进行初等行变换，将其化为阶梯形之后，得到了向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性相关的.

对已得到的阶梯形矩阵再进一步进行初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.6 在例3.2中的向量组(2)中，求出其中一个向量，使其可以由其余的向量线性表出，并写出它的一种表出方式.

解 在例3.2中，构作以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量的矩阵，并进行初等行变换，将其化为阶梯形之后，得到了向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性相关的.

对已得到的阶梯形矩阵再进一步进行初等行变换，将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$$

同解于
$$\begin{cases} x_1+2x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases},$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$$

同解于$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$，通解为$\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$，其中$x_4$ 为自由未知量.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$$

同解于$\begin{cases} x_1+2x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$，通解为$\begin{cases} x_1=-2x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}$，其中$x_4$ 为自由未知量. 即，任意的x_4，都有

$(-2x_4)\alpha_1+(-x_4)\alpha_2+x_4\alpha_3+x_4\alpha_4=0.$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$$

同解于$\begin{cases} x_1+2x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$，通解为$\begin{cases} x_1=-2x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}$，其中$x_4$ 为自由未知量. 即，任意的x_4，都有

$(-2x_4)\alpha_1+(-x_4)\alpha_2+x_4\alpha_3+x_4\alpha_4=0.$

取$x_4=-1$，则$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0$，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$$

同解于$\begin{cases} x_1+2x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$，通解为$\begin{cases} x_1=-2x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}$，其中$x_4$ 为自由未知量. 即，任意的x_4，都有

$(-2x_4)\alpha_1+(-x_4)\alpha_2+x_4\alpha_3+x_4\alpha_4=0.$

取$x_4=-1$，则$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=0$，

即$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.7 设3维向量组$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 线性无关，把每一个向量都在相同的位置添上2个分量，得到3个5维向量$\widetilde{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \widetilde{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}, \widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix}$，则$\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ 也线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

这是因为

$$\alpha,\beta,\gamma\text{线性无关}\Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0\text{只有零解}.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

这是因为

$$\alpha,\beta,\gamma\text{线性无关}\Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0\text{只有零解}.$$

$$\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\text{线性无关}\Leftrightarrow x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}=0\text{只有零解}.$$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

而$$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

的解都是

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

而$$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

的解都是

$$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0 \qquad (2)$$

的解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

而$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$

的解都是

$$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0 \qquad (2)$$

的解.

所以$\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}$也线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

而$$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

的解都是

$$x_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0 \qquad (2)$$

的解.

所以$\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}$也线性无关. 已知$\alpha,\beta,\gamma$线性无关，$(2)$只有零解，所以$(1)$也只有零解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注： 例3.7的结论可以更一般化.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：例3.7的结论可以更一般化.

设n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，若在其每一个向量的相同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 仍然线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：例3.7的结论可以更一般化.

设n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，若在其每一个向量的相同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 仍然线性无关.

称向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的延伸组，

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：例3.7的结论可以更一般化.

设n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，若在其每一个向量的相同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 仍然线性无关.

称向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的延伸组，向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$为向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：例3.7的结论可以更一般化.

设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性无关，若在其每一个向量的相同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维向量组$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\dots,\widetilde{\alpha_m}$ 仍然线性无关.

称向量组$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\dots,\widetilde{\alpha_m}$ 是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 的延伸组，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$为向量组$\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\dots,\widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组.

例3.7可以通俗的叙述为：若向量组线性无关，则其延伸组也线性无关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：例3.7的结论可以更一般化.

设n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，若在其每一个向量的相同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 仍然线性无关.

称向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的延伸组，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$为向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, \ldots, \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组.

例3.7可以通俗的叙述为：若向量组线性无关，则其延伸组也线性无关.

其逆否命题是：若向量组线性相关，则其缩短组也线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

注：例3.7的结论可以更一般化.

设n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，若在其每一个向量的相同位置都添加k 个分量，则添加分量后组成的$n+k$维向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 仍然线性无关.

称向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的延伸组，向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$为向量组$\widetilde{\alpha_1}, \widetilde{\alpha_2}, ..., \widetilde{\alpha_m}$ 的缩短组.

例3.7可以通俗的叙述为：若向量组线性无关，则其延伸组也线性无关.

其逆否命题是：若向量组线性相关，则其缩短组也线性相关.

例3.7的逆命题不真.即延伸组线性无关，缩短组未必线性无关；缩短组线性相关，延伸组未必线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.8 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$F^n$中线性无关的向量组，则向量$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.8 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$F^n$中线性无关的向量组，则向量$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

注：

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.8 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$F^n$中线性无关的向量组，则向量$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

注：① 例3.8可以表述为：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.8 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$F^n$中线性无关的向量组，则向量$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

注：① 例3.8可以表述为：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.

② 例3.8也说明：若$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关，线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

一定有解.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.8 设$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$是$F^n$中线性无关的向量组，则向量$\beta$可以由向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出的充要条件是向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

注：① 例3.8可以表述为：向量组本身线性无关，添一个向量就线性相关，则添的向量可以被原来的向量组线性表出.

② 例3.8也说明：若$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关，线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

一定有解.

且方程组的系数和常数列若满足上述条件，则方程组的解是唯一的.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.9 线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有唯一解当且仅当n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.9 线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有唯一解当且仅当n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

例3.8，例3.9实际上给出了如下结论

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.9 线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有唯一解当且仅当n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

例3.8，例3.9实际上给出了如下结论

定理3.1 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta\in F^n$. 若$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则β 可以由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 唯一的线性表出.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

例3.9 线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$ 有唯一解当且仅当n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

例3.8，例3.9实际上给出了如下结论

定理3.1 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta\in F^n$ ． 若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则β 可以由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 唯一的线性表出.

唯一性是指：若存在两种表出

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m,$$

则必有 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_m\end{pmatrix}.$

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$，

它有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\beta$，

它有唯一解 $\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta$ 线性相关.

这一节，利用向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)，给出了线性方程组有唯一解的充要条件.

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$，

它有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性无关，且$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

这一节，利用向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)，给出了线性方程组有唯一解的充要条件.那么，能否利用向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)，给出方程组有解的充要条件？有无穷多解的充要条件？

3.3 向量组的线性相关与线性无关(2)

即，线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$，

它有唯一解 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性无关，且$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta$ 线性相关.

这一节，利用向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)，给出了线性方程组有唯一解的充要条件.那么，能否利用向量组的线性相关性(线性相关、线性无关)，给出方程组有解的充要条件？有无穷多解的充要条件？为此，还需要引入一个新的概念，这将是下一节的主要内容.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com