线性代数

第二章：线性方程组

宿州学院　数学与统计学院

目录

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

上节的例2.1、例2.2、例2.3，分别给出了线性方程组有唯一解、无解、有无穷多解的情形.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

上节的例2.1、例2.2、例2.3，分别给出了线性方程组有唯一解、无解、有无穷多解的情形.

增广矩阵经过初等行变换化为阶梯形(或规范阶梯形)矩阵以后，常数列(增广矩阵的最后一列)是否出现主元，即是否出现“$0=d(d\neq 0)$” 的情况，是判别线性方程组是否有解的依据.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

上节的例2.1、例2.2、例2.3，分别给出了线性方程组有唯一解、无解、有无穷多解的情形.

增广矩阵经过初等行变换化为阶梯形(或规范阶梯形)矩阵以后，常数列(增广矩阵的最后一列)是否出现主元，即是否出现“$0=d(d\neq 0)$”的情况，是判别线性方程组是否有解的依据.

事实上，n个未知量、m个方程的线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化为阶梯形(规范阶梯形)矩阵以后，只会出现以下几种情形：

第一种情形：阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中，常数列(最后一列)出现了主元$d(d\neq 0)$，其对应的线性方程组中就出现了矛盾方程“$0=d(d\neq 0)$”.方程组无解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

第二种情形：阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中，常数列(最后一列)没有出现主元.假设阶梯形(或规范阶梯形)矩阵的非零行的个数为r，即主元个数为r .

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

第二种情形：阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中，常数列(最后一列)没有出现主元.假设阶梯形(或规范阶梯形)矩阵的非零行的个数为r，即主元个数为r .这也可能出现以下三种情形：

1.$r = n$(n 个未知量都是主变量)

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

第二种情形：阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中，常数列(最后一列)没有出现主元.假设阶梯形(或规范阶梯形)矩阵的非零行的个数为r，即主元个数为r .这也可能出现以下三种情形：

1.$r = n$(n 个未知量都是主变量)

由于n个主元应分布在不同的列，因而阶梯形矩阵的形式是

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & e_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & e_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & e_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

其中$c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$是$n$个主元，都不是零，

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

其中$c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$是$n$个主元，都不是零，
再经过适当的初等行变换，进一步将其化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

即原方程组有唯一的解向量

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

2.$r<n$(主元个数小于未知量个数)

假设r个主元分布在第1列，第j_2列，…，第j_r列，则相应的阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$c_{11}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$是$r$个都不为0的主元.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$2.r < n$(主元个数小于未知量个数)

假设r个主元分布在第1列，第j_2列，$\ldots$，第j_r列，则相应的阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn} & b_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$c_{11}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$是$r$个都不为0的主元.经过进一步的初等行变换，再将其化为规范阶梯形

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix}
{\color{red}1} & \cdots & e_{1(j_2-1)} & 0 & \cdots & e_{1(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{1n} & d_1 \\
0 & \cdots & 0 & {\color{red}1} & \cdots & e_{2(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{2n} & d_2 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & {\color{red}1} & \cdots & e_{rn} & d_r \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & e_{1(j_2-1)} & 0 & \cdots & e_{1(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{1n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & e_{2(j_r-1)} & 0 & \cdots & e_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & e_{rn} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以与原方程组同解的方程组是

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + e_{1(j_2-1)}x_{j_2-1} + \cdots + e_{1(j_r-1)}x_{j_r-1} + \cdots + e_{1n}x_n = d_1 \\ x_{j_2} + \cdots + e_{2(j_r-1)}x_{j_r-1} + \cdots + e_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{j_r} + \cdots + e_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这里，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变量，其余$n-r$个未知量是自由未知量.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这里，$x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$是方程组的主变量，其余$n-r$个未知量是自由未知量.

把主变量保留在方程的左侧，自由未知量移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \end{cases}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这里，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变量，其余$n-r$个未知量是自由未知量.

把主变量保留在方程的左侧，自由未知量移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \end{cases}$$

其中$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$是(主变量$x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外的)自由未知量，$l_{ij}(i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., n-r)$是 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$移至方程右侧以后的系数.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这里，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变量，其余$n-r$个未知量是自由未知量.

把主变量保留在方程的左侧，自由未知量移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \end{cases}$$

其中$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$是(主变量$x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外的)自由未知量，$l_{ij}(i=1,2,...,r; j=1,2,...,n-r)$是 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$移至方程右侧以后的系数.

由于$n-r$个自由未知量$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$可以取无穷多组值，因此方程组这时有无穷多个解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这里，$x_1, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$是方程组的主变量，其余$n-r$个未知量是自由未知量.

把主变量保留在方程的左侧，自由未知量移到右侧，则原方程组的同解方程组可以表示为

$$\begin{cases} x_1 & = d_1 + l_{11}x_{i_1} + \cdots + l_{1(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \\ \vdots & \vdots \\ x_{j_2} & = d_2 + l_{21}x_{i_1} + \cdots + l_{2(n-r)}x_{i_{n-r}} \end{cases}$$

其中$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$是(主变量$x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外的)自由未知量，$l_{ij}(i=1,2,...,r; j=1,2,...,n-r)$是 $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$移至方程右侧以后的系数.

由于$n-r$个自由未知量$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$可以取无穷多组值，因此方程组这时有无穷多个解.上式是方程组一般解的表示.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

3.$r > n$(主元个数大于未知量个数)

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

3.$r > n$(主元个数大于未知量个数)

n元方程组的增广矩阵共有$n+1$列，由于r个主元分布在不同的列，所以$r \leq n+1$.于是第$n+1$行的主元c_{n+1}位于第$n+1$列.从而第$n+1$个方程为$0 = c_{n+1}$，这与第二种情形的已知条件矛盾.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

3.$r > n$(主元个数大于未知量个数)

n元方程组的增广矩阵共有$n+1$列，由于r个主元分布在不同的列，所以$r \leq n+1$.于是第$n+1$行的主元c_{n+1}位于第$n+1$列.从而第$n+1$个方程为$0=c_{n+1}$，这与第二种情形的已知条件矛盾.

综上述，有以下结论：

定理2.1 m个方程，n个未知量的线性方程组的解有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多个解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$3. r > n$(主元个数大于未知量个数)

n元方程组的增广矩阵共有$n+1$列，由于r个主元分布在不同的列，所以$r \leq n+1$.于是第$n+1$行的主元c_{n+1}位于第$n+1$列.从而第$n+1$个方程为$0 = c_{n+1}$，这与第二种情形的已知条件矛盾.

综上述，有以下结论：

定理2.1 m个方程，n个未知量的线性方程组的解有三种可能：无解，有唯一解，有无穷多个解.

把线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形(或规范阶梯形)后，若阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中的常数列(最后一列)出现了主元，则其对应的方程是“$0 = d(d \neq 0)$”，这时原方程组无解；

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

若阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

若阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

当有解时，如果阶梯形(或规范阶梯形)矩阵的非零行个数r等于未知量个数n，则方程组有唯一解；

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

若阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

当有解时，如果阶梯形(或规范阶梯形)矩阵的非零行个数r等于未知量个数n，则方程组有唯一解；

如果非零行的个数$r < n$，则原方程组有无穷多个解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

若阶梯形(或规范阶梯形)矩阵中的常数列(最后一列)未出现了主元，则方程组有解.

当有解时，如果阶梯形(或规范阶梯形)矩阵的非零行个数r等于未知量个数n，则方程组有唯一解；

如果非零行的个数$r<n$，则原方程组有无穷多个解.

例2.4 a为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解.

$$\begin{cases} x_1+ & x_2- & x_3+ & x_4 & =1 \\ & x_2+ & 2x_3- & x_4 & =a \\ x_1+ & 2x_2+ & x_3 & & =3 \\ 2x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 & =4 \end{cases}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & a\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$,

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行乘(-1)加到第4行}]{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行乘(-1)加到第4行}]{\text{第2行乘(-1)加到第3行}} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \end{matrix} \right.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行乘(-1)加到第4行}]{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}\left(\begin{matrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&0&0&0&2-a\\ & & & & \end{matrix}\right.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行乘(-1)加到第4行}]{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&0&0&0&2-a\\0&0&1&1&2-a\end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

解：线性方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}$，

对增广矩阵进行初等行变换，将其化为阶梯形：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\1&2&1&0&3\\2&3&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第4行}]{\text{第1行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&1&2&-1&2\\0&1&3&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2行乘(-1)加到第4行}]{\text{第2行乘(-1)加到第3行}}\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\0&1&2&-1&a\\0&0&0&0&2-a\\0&0&1&1&2-a\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{交换第3、4行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \end{array}\right.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ & & & & \end{array}\right.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$ 时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$ ，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等行变换进一步化为规范阶梯形

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等行变换进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等行变换进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行加到第1行}]{\text{第3行乘(-2)加到第2行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等行变换进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行加到第1行}]{\text{第3行乘(-2)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$ 时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等行变换进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行加到第1行}]{\text{第3行乘(-2)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

当$2-a\neq 0$ 时，阶梯形矩阵中的最后一列出现了主元，这时方程组无解.

所以，线性方程组有解当且仅当$2-a=0$，即$a=2$.

在$a=2$时，将增广矩阵经过初等行变换进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行加到第1行}]{\text{第3行乘(-2)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

第2行乘(-1)加到第1行

$$\longrightarrow$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{matrix}\right.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以规范阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +5x_4 = -1 \\ \qquad x_2 \qquad -3x_4 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 +x_4 = 0 \end{cases}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以规范阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad +5x_4 = -1 \\ \qquad\quad x_2 \qquad\quad -3x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

原方程组的通解是 $\begin{cases} x_1 = -1 - 5x_4 \\ x_2 = 2 + 3x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$，

其中，x_4是自由未知量.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组不存在“无解”情形，所以对齐次线性方程组的问题是：如何判断齐次线性方程组是否有非零解(有无穷多个解)？

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组不存在“无解”情形，所以对齐次线性方程组的问题是：如何判断齐次线性方程组是否有非零解(有无穷多个解)？

由于齐次线性方程组的常数项均为0，所以齐次线性方程组的增广矩阵中的常数列可以省略，即m个方程n 个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

与其系数按照它相对位置定义的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

之间是相互的唯一确定的.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素都是0，对其进行初等行变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换即可.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素都是0，对其进行初等行变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换即可.利用定理2.1，有如下结论

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素都是0，对其进行初等行变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换即可.利用定理2.1，有如下结论

推论2.1 m个方程n 个未知量的齐次线性方程组只有零(平凡)解的充要条件是：它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形，非零行的个数(主元的个数)$r = n$.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素都是0，对其进行初等行变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换即可.利用定理2.1，有如下结论

推论2.1 m个方程n 个未知量的齐次线性方程组只有零(平凡)解的充要条件是：它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形，非零行的个数(主元的个数)$r = n$.

有非零(非平凡)解的充要条件是：系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形，非零行的个数(主元的个数)$r < n$.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

齐次线性方程组的增广矩阵的最后一列元素都是0，对其进行初等行变换时，最后一列的0 保持不变.即，只对齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换即可.利用定理2.1，有如下结论

推论2.1 m个方程n 个未知量的齐次线性方程组只有零(平凡)解的充要条件是：它的系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形，非零行的个数(主元的个数)$r = n$.

有非零(非平凡)解的充要条件是：系数矩阵经过初等行变换化成的阶梯形，非零行的个数(主元的个数)$r < n$.

从推论2.1又可以得到：

推论2.2 m个方程n个未知量的齐次线性方程组，若$m < n$，则它一定有非零解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这是因为$m < n$，齐次线性方程组的系数矩阵经过初等行变换化成阶梯形，它的非零行个数$r \leq m < n$，所以它有非零解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这是因为$m < n$，齐次线性方程组的系数矩阵经过初等行变换化成阶梯形，它的非零行个数$r \leq m < n$，所以它有非零解.

例2.5 a 为何值时，下述齐次线性方程组只有零解？有非零解？有非零解时，求出其通解.

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & x_3 & = 0 \\ x_1 + & 2x_2 - & ax_3 & = 0 \\ 2x_1 - & x_2 + & 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

这是因为$m < n$，齐次线性方程组的系数矩阵经过初等行变换化成阶梯形，它的非零行个数$r \leq m < n$，所以它有非零解.

例2.5 a 为何值时，下述齐次线性方程组只有零解？有非零解？有非零解时，求出其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

解：齐次线性方程组的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，对其实施初等行变换，将其化为阶梯形

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘(-1)加到第2行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

当$-3a-2 \neq 0$，即$a \neq -\frac{2}{3}$ 时，齐次线性方程组的系数矩阵所化阶梯形矩阵的非零行数为3，等于方程的未知量个数，方程组有唯一的零解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a-1 \\ 0 & 0 & -3a-2 \end{pmatrix}.$$

当$-3a-2 \neq 0$，即$a \neq -\frac{2}{3}$时，齐次线性方程组的系数矩阵所化阶梯形矩阵的非零行数为3，等于方程的未知量个数，方程组有唯一的零解.

当$-3a-2 = 0$，即$a = -\frac{2}{3}$时，齐次线性方程组的系数矩阵所化阶梯形矩阵的非零行数为2，小于方程的未知量个数3，方程组有非零解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对阶梯形的系数矩阵进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}}$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对阶梯形的系数矩阵进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对阶梯形的系数矩阵进一步化为规范阶梯形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以原齐次线性方程组在$a=-\frac{2}{3}$ 时的通解为

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{4}{3}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

其中，x_3是自由未知量.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步： 写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$；

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$的常数列没有主元，则原方程组有解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$ ；

第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元个数等于未知量个数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元个数小于未知量个数，则方程组有无穷多个解.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ ；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$ ；

第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元个数等于未知量个数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元个数小于未知量个数，则方程组有无穷多个解.

第四步：进一步化矩阵为规范阶梯形矩阵.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元个数等于未知量个数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元个数小于未知量个数，则方程组有无穷多个解.

第四步：进一步化矩阵为规范阶梯形矩阵.在线性方程组有解时，对$\overline{B}$进行初等行变换，化$\overline{B}$为规范阶梯形矩阵$\overline{C}$.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$；

第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$ 的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元个数等于未知量个数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元个数小于未知量个数，则方程组有无穷多个解.

第四步：进一步化矩阵为规范阶梯形矩阵.在线性方程组有解时，对$\overline{B}$进行初等行变换，化$\overline{B}$ 为规范阶梯形矩阵$\overline{C}$.

第五步：写出解(或通解).

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

下面，给出解一般线性方程组的方法和步骤：

第一步：写出增广矩阵. 写出线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$；

第二步：初等行变换化增广矩阵为阶梯形矩阵.对$\overline{A}$实施初等行变换，将其化为阶梯形矩阵$\overline{B}$；

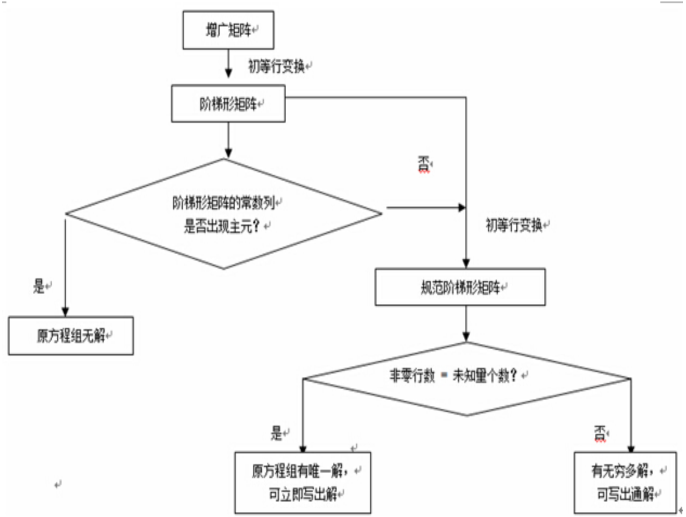
第三步：判断. 若阶梯形矩阵$\overline{B}$的常数列出现了主元，则原方程组无解；若$\overline{B}$的常数列没有主元，则原方程组有解. 在方程组有解时，若$\overline{B}$中的主元个数等于未知量个数，则方程组有唯一解；若$\overline{B}$中的主元个数小于未知量个数，则方程组有无穷多个解.

第四步：进一步化矩阵为规范阶梯形矩阵.在线性方程组有解时，对$\overline{B}$进行初等行变换，化$\overline{B}$为规范阶梯形矩阵$\overline{C}$.

第五步：写出解(或通解).由规范阶梯形矩阵$\overline{C}$可以确定自由未知量(如果有的话)，直接写出其解(或通解).

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

其基本步骤可以用如下流程图表示



2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对线性方程组引入增广矩阵之后，建立了线性方程组与矩阵之间的一一对应关系，利用增广矩阵在形式上简化了线性方程组的表达方式，对增广矩阵进行初等行变换简化了线性方程组“加减消元”过程的表达形式.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对线性方程组引入增广矩阵之后，建立了线性方程组与矩阵之间的一一对应关系，利用增广矩阵在形式上简化了线性方程组的表达方式，对增广矩阵进行初等行变换简化了线性方程组“加减消元”过程的表达形式.方程组的增广矩阵表示本质上是省略了未知量符号以及运算符号的线性方程组，以未知量的位置来代替未知量，所以线性方程组增广矩阵表示以及初等行变换解法，本质上和中学熟知的加减消元法是完全一致的.

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对线性方程组引入增广矩阵之后，建立了线性方程组与矩阵之间的一一对应关系，利用增广矩阵在形式上简化了线性方程组的表达方式，对增广矩阵进行初等行变换简化了线性方程组“加减消元”过程的表达形式.方程组的增广矩阵表示本质上是省略了未知量符号以及运算符号的线性方程组，以未知量的位置来代替未知量，所以线性方程组增广矩阵表示以及初等行变换解法，本质上和中学熟知的加减消元法是完全一致的.

问题是：是否还可以引入其它的工具，来研究一般的线性方程组？能不能给出一种“好的工具”，研究线性方程组有无穷多个解时的解集结构？

2.3 线性方程组解的情况及其判断准则

对线性方程组引入增广矩阵之后，建立了线性方程组与矩阵之间的一一对应关系，利用增广矩阵在形式上简化了线性方程组的表达方式，对增广矩阵进行初等行变换简化了线性方程组“加减消元”过程的表达形式.方程组的增广矩阵表示本质上是省略了未知量符号以及运算符号的线性方程组，以未知量的位置来代替未知量，所以线性方程组增广矩阵表示以及初等行变换解法，本质上和中学熟知的加减消元法是完全一致的.

问题是：是否还可以引入其它的工具，来研究一般的线性方程组？能不能给出一种“好的工具”，研究线性方程组有无穷多个解时的解集结构？在下一章将引入“数组向量”这个“工具”.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com