# 线性代数
# 第二章：线性方程组

宿州学院　数学与统计学院

# 目录

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.

加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.

加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

①交换两个方程的位置；

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.

加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

①交换两个方程的位置；

②将某一个方程的两边同乘一个非零数；

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.

加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

①交换两个方程的位置；

②将某一个方程的两边同乘一个非零数；

③将某一个方程的倍数加到另一个方程上去.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.

加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

①交换两个方程的位置；

②将某一个方程的两边同乘一个非零数；

③将某一个方程的倍数加到另一个方程上去.

称上述对线性方程组的三种变形为线性方程组的初等变换.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

中学阶段，已熟知解二元、三元线性方程组的加减消元法.
加减消元的过程实际上就是对线性方程组实施以下变形：

①交换两个方程的位置；

②将某一个方程的两边同乘一个非零数；

③将某一个方程的倍数加到另一个方程上去.

称上述对线性方程组的三种变形为线性方程组的**初等变换**.

由于线性方程组的初等变换只是对方程组的系数进行运算(就是合并同类项)，所以可以用线性方程组的系数、常数项以及它们的相对位置构成的数表，即，用位置来表示未知量或者常数项，相应位置的数来表示相应未知量的系数，从而实现线性方程组的表示. 这种表示就是线性方程组的矩阵表示.

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例如，“电路网络问题”所列出的方程，用矩阵表示为

$$\begin{cases} 12I_1-4I_2-7I_3 & = 40 \\ -4I_1+13I_2-5I_4 & = -10 \\ -7I_1+15I_3-6I_4 & = 30 \\ -5I_2-6I_3+14I_4 & = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & -4 & -7 & 0 & 40 \\ -4 & 13 & 0 & -5 & -10 \\ -7 & 0 & 15 & -6 & 30 \\ 0 & -5 & -6 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

一般地，$n$个未知量，$m$个方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

一般地，$n$个未知量，$m$个方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

可以用系数和常数项按照其相对位置构成的矩阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

来表示.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

一般地，$n$个未知量，$m$个方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

可以用系数和常数项按照其相对位置构成的矩阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

来表示.称$\overline{A}$为线性方程组的**增广矩阵**.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

增广矩阵$\overline{A}$完全由线性方程组唯一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 为增广矩阵也唯一地确定一个线性方程组.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

增广矩阵$\overline{A}$完全由线性方程组唯一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$为增广矩阵也唯一地确定一个线性方程组.

$$\text{例如，给定矩阵}\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

增广矩阵$\overline{A}$完全由线性方程组唯一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 为增广矩阵也唯一地确定一个线性方程组.

例如，给定矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组是唯一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \\ \\ \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

增广矩阵$\overline{A}$完全由线性方程组唯一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 为增广矩阵也唯一地确定一个线性方程组.

例如，给定矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组是唯一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \quad +x_4 \quad = 10 \\ 2x_1 \quad +x_2 \quad -x_3 \quad +x_4 \quad = 5 \\ \\ \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

增广矩阵$\overline{A}$完全由线性方程组唯一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$为增广矩阵也唯一地确定一个线性方程组.

例如，给定矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组是唯一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

增广矩阵$\overline{A}$完全由线性方程组唯一确定，且对给定一个列数不小于2的矩阵$\overline{A}$，以$\overline{A}$ 为增广矩阵也唯一地确定一个线性方程组.

例如，给定矩阵$\overline{A}=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

以$\overline{A}$为增广矩阵的线性方程组是唯一确定的，它是

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & =4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =2 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & =4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程
第1个方程乘(-1)加到第4个方程

$\rightarrow$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程
第1个方程乘(-1)加到第4个方程

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \\ \\ \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程
第1个方程乘(-1)加到第4个方程

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ \\ \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程
第1个方程乘(-1)加到第4个方程

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程
第1个方程乘(-1)加到第4个方程

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ -2x_4 = -8 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.1 利用"加减消元法"解线性方程组，即，利用线性方程组初等变换解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

第1个方程乘(-2)加到第2个方程
第1个方程乘(-1)加到第3个方程
第1个方程乘(-1)加到第4个方程

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ -2x_4 = -8 \end{cases}$$

第2个方程乘(-2)加到第3个

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right.$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & -15 \\ & & 8x_3 & & = & 24 \\ & & & & & \end{array}\right.$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & =-15 \\ & & 8x_3 & & =24 \\ & & & -2x_4 & =-8 \end{array}\right.$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{array} \right. \quad \text{第3个方程乘}\frac{1}{8}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$\rightarrow$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & & & \\ & & & & \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 8x_3 = 24 \\ -2x_4 = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$
第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ x_3 = 3 \\ \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\to \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\to \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

第4个方程乘(-1)加到第1个

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

第4个方程乘(-1)加到第1个

第4个方程加到第2个

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 6 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 8x_3 = 24 \\ -2x_4 = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

第4个方程乘(-1)加到第1个

第4个方程加到第2个

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ \quad\quad 8x_3 = 24 \\ \quad\quad -2x_4 = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$

第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ \quad\quad x_3 = 3 \\ \quad\quad x_4 = 4 \end{cases}$$

第4个方程乘(-1)加到第1个

第4个方程加到第2个

$$\rightarrow\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 3x_3 = -11 \\ \quad\quad x_3 = 3 \\ \quad\quad x_4 = 4 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & 8x_3 & & = 24 \\ & & & -2x_4 & = -8 \end{cases}$$

第3个方程乘$\frac{1}{8}$
第4个方程乘$(-\frac{1}{2})$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ & -x_2 & -3x_3 & -x_4 & = -15 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

第4个方程乘(-1)加到第1个
第4个方程加到第2个

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \\ & -x_2 & -3x_3 & = -11 \\ & & x_3 & = 3 \\ & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

第3个方程乘(-1)加到第1个
第3个方程乘3加到第2个

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 \quad +x_2 \qquad = 3 \\ \\ \\ \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 \quad +x_2 \qquad = 3 \\ \qquad\; -x_2 \qquad = -2 \\ \\ \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & -x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 3 \\ & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & & = 3 \\ & -x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 3 \\ & & x_4 & = 4 \end{array}\right.$$

第2个方程加到第1个

第2个方程乘(-1)

$$\rightarrow$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

第2个方程加到第1个

第2个方程乘(-1)

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

第2个方程加到第1个

第2个方程乘(-1)

$$\to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是方程组的解向量.

## 2.1 一般线性方程组

由于线性方程组与其增广矩阵相互唯一确定的，所以“加减消元法”解方程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述:

## 2.1 一般线性方程组

由于线性方程组与其增广矩阵相互唯一确定的，所以“加减消元法”解方程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 5 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 2.1 一般线性方程组

由于线性方程组与其增广矩阵相互唯一确定的，所以“加减消元法”解方程组的过程也可以用其对应的“增广矩阵”来描述:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ -2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6 \\ -2x_4 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

## 2.1 一般线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 8x_3 = 24 \\ -2x_4 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

## 2.1 一般线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ \quad 8x_3 = 24 \\ \quad -2x_4 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \quad -x_2 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ \quad x_3 = 3 \\ \quad x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

## 2.1 一般线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_2 + x_3 = 6 \\ \qquad -x_2 - 3x_3 = -11 \\ \qquad x_3 = 3 \\ \qquad x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

## 2.1 一般线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 - 3x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

## 2.1 一般线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 + x_3 & = 6 \\ & -x_2 - 3x_3 & = -11 \\ & x_3 & = 3 \\ & x_4 & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & = 3 \\ & -x_2 & = -2 \\ & x_3 & = 3 \\ & x_4 & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 & & & & = 1 \\ & x_2 & & & = 2 \\ & & x_3 & & = 3 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$实施以下三种初等行变换：

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（ⅰ）交换增广矩阵的某两行；

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（ i ）交换增广矩阵的某两行；

（ ii ）将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

（i）交换增广矩阵的某两行；

（ii）将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；

（iii）将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(ⅰ) 交换增广矩阵的某两行；

(ⅱ) 将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；

(ⅲ) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化为了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$为增广矩阵的线性方程组与原线性方程组是同解的.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(ⅰ) 交换增广矩阵的某两行；

(ⅱ) 将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；

(ⅲ) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化为了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$为增广矩阵的线性方程组与原线性方程组是同解的.

这是因为：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个方程的位置；

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(ⅰ) 交换增广矩阵的某两行；

(ⅱ) 将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；

(ⅲ) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化为了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$为增广矩阵的线性方程组与原线性方程组是同解的.

这是因为：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个方程的位置；将增广矩阵的某一行乘以一个非零数就相当于将某一个方程乘以一个非零数；

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

这个例子说明：利用“加减消元法”解线性方程组的过程，完全可以利用对增广矩阵的初等行变换来完成.即，对线性方程组的增广矩阵$\overline{A}$ 实施以下三种初等行变换：

(ⅰ) 交换增广矩阵的某两行；

(ⅱ) 将增广矩阵的某一行乘以一个非零数；

(ⅲ) 将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行.

将其化为了另一个矩阵$\overline{B}$，则以$\overline{B}$为增广矩阵的线性方程组与原线性方程组是同解的.

这是因为：交换增广矩阵的两行就相当于交换两个方程的位置；将增广矩阵的某一行乘以一个非零数就相当于将某一个方程乘以一个非零数；而将增广矩阵的某一行乘以一个倍数加到另一行就相当于将某一个方程乘以一个倍数加到另一个方程.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

“加减消元法”的根本思想是"消元"，也就是通过对方程组的“初等变换”，消去 方程组中排序在下面的方程中的未知量(系数)，使得方程组中下面的方程中所含的未知量个数严格小于排序在上面的方程中所含的未知量个数，从而达到“消元”的目的.

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

“加减消元法”的根本思想是"消元"，也就是通过对方程组的“初等变换”，消去 方程组中排序在下面的方程中的未知量(系数)，使得方程组中下面的方程中所含的未知量个数严格小于排序在上面的方程中所含的未知量个数，从而达到“消元”的目的.

利用增广矩阵，实质上“加减消元法”就是对方程组的增广矩阵进行初等行变，将其化为阶梯形，并最终化为规范阶梯形.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

“加减消元法”的根本思想是"消元"，也就是通过对方程组的“初等变换”，消去方程组中排序在下面的方程中的未知量(系数)，使得方程组中下面的方程中所含的未知量个数严格小于排序在上面的方程中所含的未知量个数，从而达到“消元”的目的.

利用增广矩阵，实质上“加减消元法”就是对方程组的增广矩阵进行初等行变，将其化为阶梯形，并最终化为规范阶梯形.

以规范阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组，就是我们解线性方程组时要求的最简化的形式.

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

“加减消元法”的根本思想是"消元"，也就是通过对方程组的“初等变换”，消去方程组中排序在下面的方程中的未知量(系数)，使得方程组中下面的方程中所含的未知量个数严格小于排序在上面的方程中所含的未知量个数，从而达到“消元”的目的.

利用增广矩阵，实质上“加减消元法”就是对方程组的增广矩阵进行初等行变，将其化为阶梯形，并最终化为规范阶梯形.

以规范阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组，就是我们解线性方程组时要求的最简化的形式.

因而求解一个线性方程组，其求解过程就是对其增广矩阵进行初等行变换，将其化为规范阶梯形的过程.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.2 解线性方程组$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =3 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.2 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 3 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，先将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形矩阵.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.2 解线性方程组$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =3 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，先将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形矩阵.

为了使得大家更好的体会“加减消元法”与“增广矩阵的初等行变换”之间的关系，我们把两个解题的过程对比给出：

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.2 解线性方程组$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =3 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，先将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形矩阵.

为了使得大家更好的体会“加减消元法”与“增广矩阵的初等行变换”之间的关系，我们把两个解题的过程对比给出：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.2 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =3 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，

对其进行初等行变换，先将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形矩阵.

为了使得大家更好的体会“加减消元法”与“增广矩阵的初等行变换”之间的关系，我们把两个解题的过程对比给出：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =3 \end{cases}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & -2x_3 & = 2 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & -2x_3 & = 2 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & x_3 & = -1 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_3 = 2 \\ -3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \\ -3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & -2x_3 & = 2 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & x_3 & = -1 \\ & & -3x_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & x_3 & = -1 \\ & & 0 & = -2 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

经过对增广矩阵的初等行变换，我们将其化为了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规范阶梯形)

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

经过对增广矩阵的初等行变换，我们将其化为了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规范阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

经过对增广矩阵的初等行变换，我们将其化为了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规范阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以此为增广矩阵的线性方程组(右栏中最后一个方程)

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & x_3 & = -1 \\ & & 0 & = -2 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

经过对增广矩阵的初等行变换，我们将其化为了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规范阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以此为增广矩阵的线性方程组(右栏中最后一个方程)

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad\quad 0 & = -2 \end{cases}$$

显然，无论未知量$x_1, x_2, x_3$ 取什么值都不能满足第三个方程：$0 = -2$ .

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

经过对增广矩阵的初等行变换，我们将其化为了阶梯形矩阵(左栏中的最后一个矩阵，还不是规范阶梯形)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以此为增广矩阵的线性方程组(右栏中最后一个方程)

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 & = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 & = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = -2 \end{cases}$$

显然，无论未知量$x_1, x_2, x_3$ 取什么值都不能满足第三个方程：$0 = -2$ . 这说明原方程组是一个矛盾方程组，即原方程组是以空集为解集线性方程组，也说原线性方程组无解.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & = 3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = 5 \end{cases}$$

解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =5 \end{cases}$$

解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形：

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3 解线性方程组$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =5 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3 解线性方程组$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =5 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

第1行乘(-1)加到第2行

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =5 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =3 \\ 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & =5 \end{cases}$

解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

对其进行初等行变换，将其化为阶梯形矩阵，再进一步化为规范阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1行乘(-2)加到第3行}]{\text{第1行乘(-1)加到第2行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

第2行乘$(-\frac{1}{2})$

$\longrightarrow$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}}$$

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的增广矩阵经过初等行变换化为了规范阶梯形矩阵，原方程组同解于以规范阶梯形矩阵为增广矩阵的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

$$\xrightarrow{\text{第2行乘}(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第2行乘3加到第3行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第2行乘(-1)加到第1行}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组的增广矩阵经过初等行变换化为了规范阶梯形矩阵，原方程组同解于以规范阶梯形矩阵为增广矩阵的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

由$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$知，未知量$x_2$是可以任意取值的，且每当$x_2$任意取定一个值$k$时，$x_1$都可以被其唯一确定为$x_1 = k + 2$.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

由$\begin{cases} x_1 &= x_2 + 2 \\ x_3 &= -1 \end{cases}$知，未知量$x_2$是可以任意取值的，且每当$x_2$任意取定一个值$k$时，$x_1$都可以被其唯一确定为$x_1 = k + 2$.

当任意取定$x_2 = k$时，都可以得到原方程组的一个解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

由于$k$可以取任意数，所以原方程组有无穷多解.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

由$\begin{cases} x_1 &= x_2+2 \\ x_3 &= -1 \end{cases}$知，未知量$x_2$是可以任意取值的，且每当$x_2$任意取定一个值$k$时，$x_1$都可以被其唯一确定为$x_1=k+2$.

当任意取定$x_2=k$时，都可以得到原方程组的一个解：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}.$$

由于$k$可以取任意数，所以原方程组有无穷多解.

其解集为$\left\{ \begin{pmatrix} k+2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} \middle| k\text{为任意数} \right\}$.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

也可以用 $\begin{cases} x_1 & = x_2 + 2 \\ x_3 & = -1 \end{cases}$ 来表示这无穷多个解.称为线性方程组的**一般解**，其中以主元为系数的未知量$x_1, x_3$ 称为**主变量**，未知量$x_2$称为**自由未知量**.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

也可以用$\begin{cases} x_1 &= x_2 + 2 \\ x_3 &= -1 \end{cases}$来表示这无穷多个解.称为线性方程组的一般解，其中以主元为系数的未知量$x_1, x_3$ 称为主变量，未知量$x_2$称为自由未知量.

线性方程组的一般解就是用含自由未知量的式子来表示主变量.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

也可以用 $\begin{cases} x_1 &= x_2 + 2 \\ x_3 &= -1 \end{cases}$ 来表示这无穷多个解.称为线性方程组的一般解，其中以主元为系数的未知量$x_1, x_3$ 称为主变量，未知量$x_2$称为自由未知量.

线性方程组的一般解就是用含自由未知量的式子来表示主变量.

例1.1中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化为规范形阶梯形矩阵后，主元个数与方程个数相等，方程组有唯一解.

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

也可以用$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$来表示这无穷多个解.称为线性方程组的一般解，其中以主元为系数的未知量$x_1, x_3$ 称为主变量，未知量$x_2$称为自由未知量.

线性方程组的一般解就是用含自由未知量的式子来表示主变量.

例1.1中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化为规范形阶梯形矩阵后，主元个数与方程个数相等，方程组有唯一解.

例2.2中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成阶梯形矩阵后，常数列(增广矩阵的最后一列)出现了主元，即阶梯形矩阵对应的方程组出现“$0 = d$(其中$d$ 是非零数)”这样的矛盾方程，这时方程组的解集为空集，即，方程组无解.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数为2，小于未知量个数3.这时方程组有无穷多解.

# 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数为2，小于未知量个数3.这时方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数为2，小于未知量个数3.这时方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾方程“$0 = d$（其中$d$是非零数）”，方程组无解；

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数为2，小于未知量个数3.这时方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾方程“$0 = d$ （其中$d$ 是非零数）”，方程组无解；

若常数列没有主元，则方程组有解.

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数为2，小于未知量个数3.这时方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾方程"$0=d$（其中$d$是非零数）"，方程组无解；

若常数列没有主元，则方程组有解.

在常数列没有主元时，

若非零行的个数(也是主元个数)等于未知量的个数，则方程组有唯一解；

## 2.2 线性方程组的高斯消元法

例2.3中，方程组的增广矩阵经过初等行变换化成规范阶梯形矩阵后，常数列没有出现主元，且非零行数为2，小于未知量个数3.这时方程组有无穷多解.

一般结论：线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵(或规范阶梯形矩阵)后，

若常数列(也是最后一列)出现了主元，则出现了矛盾方程"$0 = d$（其中$d$ 是非零数）"，方程组无解；

若常数列没有主元，则方程组有解.

在常数列没有主元时，

若非零行的个数(也是主元个数)等于未知量的个数，则方程组有唯一解；

若非零行的个数(也是主元个数)小于未知量的个数，则原方程组有无穷多解.

# *Thank you!*

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com